P2. Considere la siguiente EDO con coeficientes variables:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x}\ln(x), \quad x > 0$$

a) Sabiendo que x y $x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación hómogenea, demuestre que son linealmente independientes.

b) Utilizando el método de variación de parámetros, encuentre una solución particular de la EDO.

a) Como sabemos que son solución de la edo homogénea, utilizamos el criterio del Wronskiano:

Denotamos $f_1 \equiv x$, $f_2 \equiv x\ln(x)$.

$$W[f_1,f_2](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) \\ 1 & \ln(x)+1 \end{vmatrix}$$

$$= x\ln(x) - (x\ln(x) - x) = x > 0.$$

Luego $W[f_1,f_2] \neq 0 \iff x, \ln(x)$ son l.i

b) Recordamos que el método de variación de parámetros sirve para conocer la solución particular de la edo, si conocemos soluciones homogéneas l.i. Luego

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$ recién calculado

Identificamos $y_1 \equiv x$, $y_2 \equiv x\ln(x)$, $\bar{Q} \equiv \frac{4\ln(x)}{x}$. $W[y_1,y_2](x) = x$.

Así:

$$y_p(x) = x\ln(x)\int_{x_0}^{x} \frac{t \cdot \frac{4\ln(t)}{t}}{t}\,dt - x\int_{x_0}^{x} \frac{t\ln(t) \cdot \frac{4\ln(t)}{t}}{t}\,dt$$

$$= 4x\ln(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\ln(t)}{t}\,dt - 4x\int_{x_0}^{x} \frac{\ln^2(t)}{t}\,dt$$

$$u = \ln(t),\ du = \frac{1}{t}\,dt$$

$$= 4x\ln(x)\int_{\ln(x_0)}^{\ln(x)} u\,du - 4x\int_{\ln(x_0)}^{\ln(x)} u^2\,du$$

$$= 4x\ln(x)\left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x_0)^2}{2}\right) - 4x\left(\frac{\ln(x)^3 - \ln(x_0)^3}{3}\right)$$

Tomemos $x_0 = 1$. Es válido pues $x_0 > 0$.

$$= \frac{4x\ln^3(x)}{2} - \frac{4}{3}x\ln^3(x) = \frac{2}{3}x\ln^3(x)$$

$$\therefore\ y_p(x) = \frac{2}{3}x\ln^3(x)$$

P4. Encuentre la expresión en serie de potencias de la función $f(x) = \cos(2x)$ utilizando la EDO

$$y'' + 4y = 0$$

Hint: Aproveche el Teorema de Existencia y Unicidad.

La idea de este problema será encontrar dos Funciones que solucionen el mismo problema de Cauchy. Gracias al teu, deberán ser la misma.

Consideremos el problema de Cauchy

$a < 0 < b$

$$PC \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases} ,\ x \in [a,b]$$

Notamos lo siguiente:

$$(\cos(2x))'' + 4\cos(2x) = -4\cos(2x) + 4\cos(2x) = 0$$

Donde $\cos(2\cdot 0) = 1$, $(\cos(2x))' = -2\sin(2x) \Rightarrow -2\sin(2\cdot 0) = 0$.

Por lo tanto $\cos(2x)$ es una solución. Ahora nos gustaria encontrar una serie de potencias que solucione el PC:
Es decir, tal que: (Supongamos que converge absolutamente)

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)'' + 4\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \quad , \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 0} 4a_n x^n = 0$$

Ahora usamos que

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n-1)a_{n+2}x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 4a_n\right]x^n = 0$$

Como esto es para cada x:

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + 4a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{-4a_n}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow a_2 = \frac{-4a_0}{2} = \frac{(-4)^1 a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{-4\left(\frac{-4a_0}{2}\right)}{4\cdot 3} = \frac{(-4)^2 a_0}{4!}$$

$$a_6 = \frac{-4\left(\frac{(-4)^2 a_0}{4\cdot 3\cdot 2}\right)}{6\cdot 5} = \frac{(-4)^3 a_0}{6!}$$

Luego no es difícil convencerse que $a_{2k} = \dfrac{(-4)^k a_0}{(2k)!}$

(Se podría probar por inducción)

Análogamente para los coeficientes impares:

$$a_3 = \frac{-4a_1}{3\cdot 2} = \frac{(-4)^1 a_1}{3!} \qquad a_5 = \frac{-4\left(\frac{-4a_1}{3\cdot 2}\right)}{5\cdot 4} = \frac{(-4)^2 a_1}{5!}$$

$$\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{(-4)^k a_1}{(2k+1)!}$$

Luego

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{k\geq 0} \frac{(-4)^k a_0}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k\geq 0}\frac{(-4)^k a_1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Imponiendo las cond iniciales, $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$$y'(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-4)^k 2k\, a_0\, x^{2k-1}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-4)^k (2k+1)\, a_1\, x^{2k}}{(2k+1)!}$$

$y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$

Así, la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-4)^k x^{2k}}{(2k)!}$ soluciona el problema de Cauchy.

Como los coeficientes de la edo son funciones continuas en $[a,b]$, la solución del PC es única.
$\in$ (constantes)

Por lo tanto, $\displaystyle\cos(2x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-4)^k x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in [a,b]$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 5 P1-P3

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Benjamín Gallardo

P1. El objetivo de este problema es resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \text{ con } x > 0$$

Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Por inspección, encuentre una solución a la ecuación homogénea.
Pauta: Como los coeficientes son polinomios sugerimos una solución de la forma $y_1 = x^n$. Para verificar esto y encontrar el valor de n reemplazamos en la EDO homógenea:

$$x^2(x^n)'' - 3x(x^n)' + 4(x^n) = 0$$

$$x^2(n(n-1)x^{n-2}) - 3x(nx^{n-1}) + 4x^n = 0$$

$$n(n-1)x^n - 3nx^n + 4x^n = 0$$

Como $x > 0$ podemos dividir por x^n:

$$n(n-1) - 3n + 4 = 0 \Longleftrightarrow n^2 - 4n + 4 = 0$$

Factorizando queda

$$(n-2)^2 = 0$$

Por lo que se confirma que x^n es solución con $n = 2$.

b) Encuentre una solución linealmente independiente y exprese la solución homogénea de la ecuación.
Pauta: Para esto podemos usar la fórmula de Liouville:

$$y_2 = Cy_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x)dx\right) dx$$

Reemplazando y_1 con x^2 y $\bar{a}_1(x)$ con $-\frac{3}{x}$ (el término que acompaña a y' en la EDO normalizada) la fórmula queda

$$y_2 = Cx^2 \int \frac{1}{x^4} \exp\left(\int \frac{3}{x}dx\right) dx$$

$$y_2 = Cx^2 \int \frac{1}{x^4} \exp\left(\ln(x^3)\right) dx = Cx^2 \int \frac{x^3}{x^4}dx$$

Notemos que ahí al integrar no agregamos la constante de integración. Esto es porque la constante resultante habría sido absorbida por C, por lo que puede omitirse. Sin embargo, esto no sucede en la siguiente integral.

$$y_2 = Cx^2 \int \frac{1}{x}dx = Cx^2(\ln(x) + k) = Cx^2\ln(x) + Ckx^2$$

Como nuestra solución anterior era $y_1 = x^2$ y ahora tenemos que $y_2 = Cx^2\ln(x) + Ckx^2$ es otra solución homogénea, entonces sigue que una base de las soluciones homogéneas es $\{x^2, x^2\ln(x)\}$. Luego la solución homogénea escrita de manera general es

$$y_h(x) = Ax^2 + Bx^2\ln(x)\ ,\ A, B \in \mathbb{R}$$

c) Utilizando variación de parámetros, encuentre una solución particular.
Pauta: El método nos dice que la solución particular tendrá la siguiente forma:

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

Reemplazando $\bar{Q}(x) = \ln(x)$ (a lo que está igualado la EDO no homogénea normalizada) y $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2\ln(x)$ (nuestra base homogénea), tenemos:

$$y_p(x) = x^2\ln(x)\int_{x_0}^{x} \frac{t^2\ln(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt - x^2\int_{x_0}^{x} \frac{t^2\ln(t)^2}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

Calculemos el Wronskiano $W[y_1,y_2](x) = W[x^2, x^2\ln(x)]$:

$$W[x^2, x^2\ln(x)] = \begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln(x) \\ 2x & 2x\ln(x) + x \end{vmatrix} = 2x^3\ln(x) + x^3 - 2x^3\ln(x) = x^3$$

Por último reemplazando esto en nuestra expresión nos queda:

$$y_p(x) = x^2\ln(x)\int_{x_0}^{x} \frac{t^2\ln(t)}{t^3}\,dt - x^2\int_{x_0}^{x} \frac{t^2\ln(t)^2}{t^3}\,dx = x^2\ln(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\ln(t)}{t}\,dt - x^2\int_{x_0}^{x} \frac{\ln(t)^2}{t}\,dx$$

Resolviendo las integrales llegamos a

$$y_p(x) = x^2\ln(x)\left(\frac{\ln^2(x)}{2} - \frac{\ln^2(x_0)}{2}\right) - x^2\left(\frac{\ln^3(x)}{3} - \frac{\ln^3(x_0)}{3}\right)$$

Como podemos elegir el x_0 que nos convenga mientras esté en el intervalo donde esté definida la EDO, elegimos $x_0 = 1$ y tenemos:

$$y_p(x) = \frac{x^2\ln^3(x)}{2} - \frac{x^2\ln^3(x)}{3} = \frac{x^2\ln^3(x)}{6}$$

d) Entregue la solución general de la ecuación.
Pauta: Por último la solución general será la suma de la solución particular con la solución homogénea:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x^2\ln^3(x)}{6} + Ax^2 + Bx^2\ln(x).\ A, B \in \mathbb{R}$$

P3. En este ejercicio veremos condiciones para *factorizar* una ecuación lineal de orden 2 a coeficientes no constantes. Consideremos entonces la ecuación lineal homogénea

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \text{ con } a_1, a_0 : I \to \mathbb{R} \text{ en } C^1(I).$$

Supongamos que tenemos la factorización:

$$\lambda^2 + a_1(t)\lambda + a_0(t) = (\lambda - \lambda_1(t))(\lambda - \lambda_2(t)),$$

con λ_1, λ_2 definidas en I con derivada continua.

a) Para $\mu(t)$ una función continua, denotamos el operador $(D-\mu(t))y = y' - \mu(t)y$. Demuestre que:

$$(D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y \text{ para toda } y \in C^2(I) \text{ si y solo si } \lambda_2' \equiv 0.$$

Pauta: Primero notamos qué nos dice la factorización:

$$\lambda^2 + a_1(t)\lambda + a_0(t) = (\lambda - \lambda_1(t))(\lambda - \lambda_2(t)) \Longrightarrow a_1(t) = -(\lambda_1(t) + \lambda_2(t))\ ;\ a_0(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)$$

Ahora veamos cómo se ve la expresión $\boldsymbol{(D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y}$ **:**

$$(D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y = (D-\lambda_1(t))(y' - \lambda_2(t)y)$$

$$\begin{aligned}(D-\lambda_1(t))(y'-\lambda_2(t)y) &= y'' - \lambda_1(t)y' - \lambda_2'(t)y - \lambda_2(t)y' + \lambda_1(t)\lambda_2(t)y\\ &= y'' - (\lambda_1(t)+\lambda_2(t))y' + (-\lambda_2'(t) + \lambda_1(t)\lambda_2(t))y\end{aligned}$$

Reemplazando las igualdades que teníamos para a_1 y a_0 tenemos:

$$(D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y = y'' + a_1(t)y' + (-\lambda_2'(t) + a_0(t))y$$

Luego aprovechando esta igualdad:

$$\boldsymbol{(D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y} = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

$$\iff \boldsymbol{y'' + a_1(t)y' + (-\lambda_2'(t) + a_0(t))y} = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

esta última igualdad solo es posible si $\lambda_2'(t)$ es nula (cuando y es no trivial):

$$y'' + a_1(t)y' + (-\lambda_2'(t) + a_0(t))y = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y \iff \lambda_2'(t) = 0$$

b) Encuentre la solución general de la ecuación, cuando se cumple la igualdad de la parte *a*.
Pauta: Sea $z = (D - \lambda_2(t))y$, podemos reescribir la EDO como

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \iff (D-\lambda_1(t)) \circ (D-\lambda_2(t))y = 0 \iff (D-\lambda_1(t))z = 0$$

Luego nos queda la siguiente EDO

$$z' - \lambda_1(t)z = 0$$

Esta EDO se puede resolver por variables separables

$$\frac{z'}{z} = \lambda_1(t) \Longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \lambda_1(t)dt$$

Nos queda entonces

$$\ln(z) = \int \lambda_1(t)dt + C \Longrightarrow z = Ke^{\int \lambda_1(t)dt},\ \text{con } K = e^C$$

Luego volviendo a la expresión original de z:

$$(D-\lambda_2(t))y = Ke^{\int \lambda_1(t)dt} \iff y' - \lambda_2(t)y = Ke^{\int \lambda_1(t)dt}$$

Nos queda una EDO que se puede resolver con factor integrante $\mu = e^{\int -\lambda_2(t)dt}$:

$$y'e^{\int -\lambda_2(t)dt} - \lambda_2(t)ye^{\int -\lambda_2(t)dt} = Ke^{\int \lambda_1(t)dt}e^{\int -\lambda_2(t)dt}$$

$$\iff (ye^{\int -\lambda_2(t)dt})' = Ke^{\int(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))dt}$$

Integrando llegamos a una expresión para y:

$$ye^{\int -\lambda_2(t)dt} = \int Ke^{\int(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))dt}dt + B;\ B \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = e^{\int \lambda_2(t)dt} \int Ke^{\int(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))dt}dt + e^{\int \lambda_2(t)dt}B$$

Usando que $\lambda_2'(t) = 0 \implies \lambda_2(t) = A;\ A \in \mathbb{R}$ la expresión final queda

$$y = K_2 e^{At} \int e^{\int(\lambda_1(t)dt - At}dt + e^{At}B_2$$

Donde K_2 y B_2 son constantes reales.

c) En este mismo caso, determine la fórmula general para la ecuación lineal no homogénea asociada:

$$(D - \lambda_1(t)) \circ (D - \lambda_2(t))y = h(t), \text{ con } h : I \to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

Pauta: Haciendo nuevamente el cambio de variable $z = (D - \lambda_2(t))y$ la expresión queda

$$(D - \lambda_1(t))z = h(t) \iff z' - \lambda_1(t)z = h(t)$$

Usando factor integrante $\mu = e^{-\int \lambda_1(t)dt}$ la EDO queda

$$z'e^{-\int \lambda_1(t)dt} - \lambda_1(t)ze^{-\int \lambda_1(t)dt} = h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt} \iff (ze^{-\int \lambda_1(t)dt})' = h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}$$

Entonces integrando z nos queda

$$z = e^{\int \lambda_1(t)dt} \int h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}dt + Ce^{\int \lambda_1(t)dt}$$

Volviendo a la expresión original de z, pero reemplazando de inmediato $\lambda_2(t) = K$:

$$y' - Ky = e^{\int \lambda_1(t)dt} \int h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}dt + Ce^{\int \lambda_1(t)dt}$$

Esto igual puede ser resuelto mediante factor integrante $\mu = e^{-Kx}$:

$$(ye^{-Kt})' = e^{-Kt}\left(e^{\int \lambda_1(t)dt} \int h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}dt + Ce^{\int \lambda_1(t)dt}\right)$$

$$ye^{-Kt} = \int \left(e^{-Kt}\left(e^{\int \lambda_1(t)dt} \int h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}dt + Ce^{\int \lambda_1(t)dt}\right)\right)dt + A$$

$$\iff y = e^{Kt} \int \left(e^{-Kt}\left(e^{\int \lambda_1(t)dt} \int h(t)e^{-\int \lambda_1(t)dt}dt + Ce^{\int \lambda_1(t)dt}\right)\right)dt + e^{Kt}A$$