Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 5: Método de variación de parámetros

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro y Benjamín Gallardo

Resumen

- De aquí para abajo, consideramos la siguiente EDO lineal de segundo orden en un intervalo I. Notemos que es su versión **normalizada.**

$$y'' + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x), \quad x \in I \tag{1}$$

- **[Wronskiano]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Definimos su Wronskiano como sigue:

$$W[y_1, y_2](x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

- **[Fórmula de Abel]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Entonces:

$$W[y_1, y_2](x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \bar{a}_1(t)dt\right), \text{ para } x \in I$$

donde $x_0 \in I$.

- **[Fórmula de Liouville]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Entonces:

$$y_2 = Cy_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int \bar{a}_1(t)\,dt\right)dt$$

Nótese que esta fórmula es lo mismo que combinar las dos fórmulas anteriores para el Wronskiano.

- **[Caracterización de la independencia lineal]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Entonces:

$$W[y_1, y_2](\bar{x}) \neq 0, \text{ para algún } \bar{x} \in I \iff y_1, y_2 \text{ son l.i.} \iff \forall x \in I, W[y_1, y_2](x) \neq 0$$

- **[Variación de Parámetros]**: Sean y_1, y_2 soluciones **linealmente independientes** de la EDO homogénea de (1). Entonces, una solución particular de (1) verifica:

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt$$

P1. El objetivo de este problema es resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \text{ con } x > 0$$

Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Por inspección, encuentre una solución a la ecuación homogénea.

b) Encuentre una solución linealmente independiente y exprese la solución homogénea de la ecuación.

c) Utilizando variación de parámetros, encuentre una solución particular.

d) Entregue la solución general de la ecuación.

P2. Considere la siguiente EDO lineal de segundo orden:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x}\ln(x), \quad x > 0$$

a) Sabiendo que x y $x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación hómogenea, demuestre que son linealmente independientes.

b) Utilizando el método de variación de parámetros, encuentre una solución particular de la EDO.

P3. En este ejercicio veremos condiciones para *factorizar* una ecuación lineal de orden 2 a coeficientes no constantes. Consideremos entonces la ecuación lineal homogénea

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \text{ con } a_1, a_0 : I \to \mathbb{R} \text{ en } C^1(I).$$

Supongamos que tenemos la factorización:

$$\lambda^2 + a_1(t)\lambda + a_0(t) = (\lambda - \lambda_1(t))(\lambda - \lambda_2(t)),$$

con λ_1, λ_2 definidas en I con derivada continua.

a) Para $\mu(t)$ una función continua, denotamos el operador $(D - \mu(t))y = y' - \mu(t)y$. Demuestre que:

$$(D - \lambda_1(t)) \circ (D - \lambda_2(t))y = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y \text{ para toda } y \in C^2(I) \text{ si y solo si } \lambda_2' \equiv 0.$$

b) Encuentre la solución general de la ecuación, cuando se cumple la igualdad de la parte *a*.

c) En este mismo caso, determine la fórmula general para la ecuación lineal no homogénea asociada:

$$(D - \lambda_1(t)) \circ (D - \lambda_2(t))y = h(t), \text{ con } h : I \to \mathbb{R} \text{ continua.}$$

P4. Encuentre la expresión en serie de potencias de la función $f(x) = \cos(2x)$ utilizando la siguiente EDO:

$$y'' + 4y = 0$$

Hint: Aproveche el Teorema de Existencia y Unicidad.