Resuelva el problema de Cauchy para las siguientes condiciones iniciales

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, x \in [0,1]$$

1. $y(0) = 0$
2. $y'(0) = 1$

¿Contradice esto el teorema de existencia y unicidad? Argumente.

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0 \quad \text{en } [0,1]$$

Utilizamos el siguiente c.v:

$x = e^u$

$\Leftrightarrow u = \ln(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$= \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx} = \frac{d^2y}{du^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{du}\frac{1}{x^2}$$

Así $(\ddot{y} - \dot{y}) + 3\dot{y} + y = 0$ $\left(\text{Donde } \dot{y} := \frac{dy}{du} \right)$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$

EDO 2do orden lineal con coefs ctes! Sabemo resolverlo:

Polinomio caract: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

Luego, vimos que las solución de esta edo será de la Forma

$$\tilde{y}_{\alpha,\beta}(u) = \alpha e^{-u} + \beta u e^{-u}$$

Deshaciendo el c.v, la sol de la edo original:

$$y(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta \frac{\ln(x)}{x}$$

Claramente, $y(0)$ no está definido. Además $\lim_{t \to 0^+} y(t) = \pm \infty$ (según β)

Luego, no existe una Función continua en $[0,1]$ que solucione la edo, (pues tampoco sería derivable).

Sin embargo el TEU nos garantizaba la existencia de soluciones para problemas de Cauchy en un cerrado. ¿Qué ocurre acá?

Recordemos el enunciado del TEU visto en clases:

Teorema (de existencia y unicidad para las ecuaciones lineales de 2ndo orden)

Sean $p(x), q(x), r(x)$ funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$. Si $x_0 \in [a,b]$ y $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

posee una única solución $y(x)$ definida en todo $[a,b]$.

Si nos damos cuenta, está enunciado para edos normalizadas (coef que acompaña a y'' es 1). Normalizemos nuestra edo:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Sorpresa! Nos damos cuenta que para nuestra edo

$p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^2}$, Funciones que no son continuas

en $[0,1]$, de hecho, ni siquiera están definidas en 0.

Luego, como las hipótesis no se cumplen el teorema no se tiene, por lo que puede ocurrir la no-existencia de solución y no se contradice el teorema de existencia y unicidad.