MA2601-3 Ecucaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Michal A. Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro - Benjamín Gallardo A.

Pauta Aux 3 P2-P4

P2 Usando el cambio de variable independiente $x = e^z$ resuelva las siguientes EDO's:

- $$x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0$$

Pauta: Usando el cambio de variable $x = e^z$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Como $z = \ln x$, entonces $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$$

Ahora calculemos $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}\frac{1}{x} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2}$$

Luego reemplazando las derivadas en la EDO nos queda

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2}\right) + 3x\left(\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}\right) + 10y = 0$$

Lo que simplificado queda

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 3\frac{dy}{dz} + 10y = 0$$

$$\iff \frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} + 10y = 0$$

Es decir, este cambio de variable nos lleva a una EDO lineal de segundo orden a coeficientes constantes.
El polinomio característico sería

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

Que escrito de otra manera

$$(\lambda+1)^2 - 1 + 10 = 0 \implies (\lambda+1)^2 = -9 \implies \lambda + 1 = \pm 3i \implies \lambda = \pm 3i - 1$$

Luego la solución de la EDO respecto a z es

$$y(z) = Ae^{(3i-1)z} + Be^{(-3i-1)z} = e^{-z}\left(A\left(\cos(3z) + i\sin(3z)\right) + B(\cos(-3z) + i\sin(-3z))\right)$$

$= e^{-z}\left(A\left(\cos(3z) + i\sin(3z)\right) + B(\cos(3z) - i\sin(3z))\right) = e^{-z}\left((A+B)\cos(3z) + (Ai - Bi)\sin(3z)\right)$

Definiendo $C = A + B$ y $D = Ai - Bi$ tenemos

$$y(z) = e^{-z}\left(C\cos(3z) + D\sin(3z)\right)$$

Luego volviendo a x recordando que $z = \ln x$, la solución queda:

$$y(x) = e^{-\ln x}(C\cos(3\ln x) + D\sin(3\ln x)) = \frac{1}{x}(C\cos(3\ln x) + D\sin(3\ln x))$$

- $$4x^2y'' - 3y = 0$$

  Pauta: Del caso anterior sabemos que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz}\frac{1}{x^2}$.
  Pero antes de aplicar esto, normalizamos la EDO

  $$x^2y'' - \frac{3}{4}y = 0$$

  Con lo que esta EDO después del cambio de variable queda

  $$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} - \frac{3}{4}y = 0$$

  Es decir, su polinomio queda como

  $$\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} = 0$$

  Que reescrito queda

  $$(\lambda - 1/2)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0 \Longrightarrow (\lambda - 1/2)^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 + \frac{1}{2}$$

  Luego $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ y la solución respecto a z sería

  $$y(z) = Ae^{\frac{3}{2}z} + Be^{-\frac{1}{2}z}$$

  Volviendo a x con $z = \ln x$, la solución final queda:

  $$y(x) = Ae^{\frac{3}{2}\ln x} + Be^{-\frac{1}{2}\ln x} = Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{-\frac{1}{2}}$$

- $$x^2y'' + xy' - 16y = 0$$

  Pauta: Nuevamente, gracias al cambio de variable la EDO nos va a quedar como

  $$\frac{d^2y}{dz^2} + (1-1)\frac{dy}{dz} - 16y = \frac{d^2y}{dz^2} - 16y = 0$$

  Por lo que el polinomio queda como

  $$\lambda^2 - 16 = 0$$

  Lo que tiene como solución $\lambda = \pm 4$.
  Luego la solución de la EDO respecto a z es

  $$y(z) = Ae^{4z} + Be^{-4z}$$

  Volviendo a x usando que $z = \ln x$, la solución final queda

  $$y(x) = Ae^{4\ln x} + Be^{-4\ln x} = Ax^4 + Bx^{-4}$$

P4 Resuelva los siguientes problemas de Cauchy:

- $$y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$$

  Pauta:
  Como es una EDO lineal homogénea de segundo orden a coeficientes constantes usamos polinomio característico. Su polinomio en este caso sería

  $$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

  Factorizandolo queda
  $$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
  Es decir, las soluciones son $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.
  Luego la solución general de la EDO es

  $$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

  Apliquemos condiciones iniciales para despejar las constantes

  $$\begin{aligned} y(1) &= Ae^2 + Be^3 = e^2 \\ y'(1) &= 2Ae^2 + 3Be^3 = 3e^2 \end{aligned}$$

  La primera condición nos dice que

  $$A = \frac{e^2 - Be^3}{e^2} = 1 - Be$$

  Reemplazando en la segunda

  $$2(1 - Be)e^2 + 3Be^3 = 2e^2 - 2Be^3 + 3Be^3 = 3e^2$$

  $$\Longrightarrow Be^3 = e^2 \Longrightarrow B = 1/e$$

  Luego $A = 0$ y la solución final es

  $$y(x) = e^{3x-1}$$

- $$y'' + 4y' + 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

  Pauta:
  Similar al caso anterior sacamos su polinomio característico:

  $$\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

  Esto lo podemos reescribir como

  $$(\lambda + 2)^2 - 4 + 2 = 0 \Longrightarrow (\lambda + 2)^2 = 2 \Longrightarrow \lambda + 2 = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} - 2$$

  Luego la solución de la EDO queda

  $$y(x) = Ae^{(\sqrt{2}-2)x} + Be^{(-\sqrt{2}-2)x}$$

Evaluando las condiciones iniciales para despejar las constantes:

$$y(0) = A + B = -1 \Longrightarrow A = -1 - B$$

$$y'(x) = A(\sqrt{2}-2)e^{(\sqrt{2}-2)x} + B(-\sqrt{2}-2)e^{(-\sqrt{2}-2)x}$$

Evaluando la derivada en 0:

$$y'(0) = A(\sqrt{2}-2) + B(-\sqrt{2}-2) = 2 + 3\sqrt{2}$$

Usando lo que obtuvimos de la primera conidición:

$$y'(0) = (-1-B)(\sqrt{2}-2)+B(-\sqrt{2}-2) = 2+3\sqrt{2} \Longrightarrow B(-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}-2)-\sqrt{2}+2 = 2+3\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow -2\sqrt{2}B - \sqrt{2} + 2 = 2 + 3\sqrt{2} \Longrightarrow -2B - 1 = 3 \Longrightarrow B = -2$$

Luego se tiene que $A = 1$ y la EDO queda

$$y(x) = e^{(\sqrt{2}-2)x} - 2e^{(-\sqrt{2}-2)x}.$$

- $$y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

  Pauta:
  El polinomio característico de la EDO queda como

  $$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

  Reescribiendolo queda

  $$(\lambda+2)^2 - 4 + 5 = 0 \Longrightarrow (\lambda+2)^2 = -1 \Longrightarrow \lambda + 2 = \pm i \Longrightarrow \lambda = \pm i - 2$$

  Con lo que la solución general queda

  $$y(x) = e^{-2x}(A\cos(x) + B\sin(x))$$

  Evaluando en la primera condición inicial:

  $$y(0) = A = 1$$

  La derivada de y en este caso es (reemplazando $A = 1$)

  $$y'(x) = -2e^{-2x}\cos(x) - e^{-2x}\sin(x) - 2Be^{-2x}\sin(x) + Be^{-2x}\cos(x)$$

  Aplicando la segunda condición inicial

  $$y'(0) = -2 - 0 - 0 + B = 0 \Longrightarrow B = 2$$

  Con lo que la EDO queda

  $$y(x) = e^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))$$