Aux 2

En este auxiliar estudiaremos el caso general de las EDOs lineales de segundo orden. Esto es, identidades de la forma

$$p(x)y''(x)+q(x)y'(x)+r(x)y(x)=b(x) \quad , \quad x\in I$$

Donde p, q, r, b son funciones continuas de I a $\mathbb{R}$ e $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo.

En clases, vimos que una función en la familia de soluciones de esta EDO será de la forma:

$$y_{\alpha,\beta}(x) = y_p(x) + \alpha y_{h_1}(x) + \beta y_{h_2}(x),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; las funciones y_{h_1}, y_{h_2} son soluciones linealmente independientes de la versión homogénea de la edo original, e y_p es una solución del problema particular $(b(x)\neq 0)$.

Consideraremos el siguiente criterio visto en clases:

Dadas dos funciones derivables $f, g : I \to \mathbb{R}$ definimos su Wronskiano, $W_{f,g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$W_{f,g}(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

(Donde $|\cdot|$ denota al determinante)

Criterio de independencia lineal entre dos funciones:

$W_{f,g}(x_0)$ para algún $x_0 \in I \Longleftrightarrow f,g$ son l.i

P1 En el caso particular en el que los coeficientes de la edo es homogénea y sus funciones coeficientes son constantes, podemos usar el método del polinomio característico. Esto es, suponemos que la solución es de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

$$\Rightarrow (e^{\lambda x})'' + (e^{\lambda x})' - 6e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + \lambda - 6)e^{\lambda x} = 0.$$

Como $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ (créanme) entonces necesariamente:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación estarán dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{h_1} = e^{2x}, \; y_{h_2} = e^{-3x}.$$

Luego, usando lo que mencionamos en la primera página; debemos checkear que estas funciones son l.i. para que la solución esté dada por su combinación lineal.

Para ahorrarnos este trabajo, podran usar que si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces $f_1 = e^{\alpha_1 \cdot}$, $f_2 = e^{\alpha_2 \cdot}$ son l.i. En efecto:

$$W_{f_1,f_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = \alpha_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)x} - \alpha_1 e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}$$

Donde $\alpha_2 \neq \alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$ y $e^{(\alpha_1+\alpha_2)x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Por último, notamos que como la edo ya era homogénea, $y_p \equiv 0$.

Así:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-3x}$ es solución de la edo.

2.- $16y'' - 8y' + 5y = 0$

Asumimos $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego:

$$16(e^{\lambda x})'' - 8(e^{\lambda x})' + 5e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow (16\lambda^2 - 8\lambda + 5)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 320}}{32} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-256}}{32}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 16i}{32} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{i}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

Como al tomar la solución $e^{\lambda x}$ para este λ, nos entregaría una función a valores complejos, nos contentaremos con tomar $y_{h_1}(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x})$ junto a $y_{h_2}(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x})$, ambas funciones a valores reales. Así:

$$y_{h_1}(x) = \mathrm{Re}(e^{x/4 + xi/2}) = \mathrm{Re}(e^{x/4} \cdot e^{xi/2}) = e^{x/4} \cdot \mathrm{Re}(e^{xi/2})$$
$$= e^{x/4} \cos(x/2)$$

$$y_{h_2}(x) = \mathrm{Im}(e^{x/4 + xi/2}) = \mathrm{Im}(e^{x/4} \cdot e^{xi/2}) = e^{x/4} \cdot \mathrm{Im}(e^{ix/2})$$
$$= e^{x/4} \cdot \sin(x/2)$$

Donde usamos que: $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha \mathrm{Re}(z) \\ \wedge \\ \mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha \mathrm{Im}(z) \end{cases}$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Para que la solución general de la edo sea la combinación lineal de estas dos funciones, debemos comprobar que sean l.i.

Veremos una vez más que en general, para $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $f_1 = e^{a\cdot}\cos(b\cdot)$ y $f_2 = e^{a\cdot}\sin(b\cdot)$ son l.i. (esto lo podrán usar)

Usando el criterio del Wronskiano:

$$W_{f_1,f_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos(bx) & e^{ax}\sin(bx) \\ ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) & ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx) \end{vmatrix}$$

$$= e^{ax}\begin{vmatrix} \cos(bx) & \sin(bx) \\ a\cos(bx) - b\sin(bx) & a\sin(bx) + b\cos(bx) \end{vmatrix}$$

$$= e^{ax}\cdot\left(\frac{a}{2}\sin(2bx) + b\cos^2(bx) - \left(\frac{a}{2}\sin(2bx) - b\sin^2(bx)\right)\right)$$

$$= e^{ax}\cdot b(\cos^2(bx) + \sin^2(bx)) = be^{ax} \neq 0.$$

Volviendo al problema, sigue que $e^{\cdot/4}\cos(\cdot/2), e^{\cdot/4}\sin(\cdot/2)$ son l.i, y por ende:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ y_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{x/4}\cos(x/2) + \beta e^{x/4}\sin(x/2)$ es solución de la EDO.

En general, si $\lambda_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$: $y_{h_1}(x) = \exp(\mathrm{Re}(\lambda_1)x)\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)x)$

$y_{h_2}(x) = \exp(\mathrm{Re}(\lambda_1)x)\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)x)$

3.- $9y'' - 6\pi y' + \pi^2 y = 0$

Asumimos $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Rightarrow 9(e^{\lambda x})'' - 6\pi(e^{\lambda x})' + \pi^2 y = 0$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2 e^{\lambda x} - 6\pi\lambda e^{\lambda x} + \pi^2 e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow (9\lambda^2 - 6\pi\lambda + \pi^2) e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2 - 6\pi\lambda + \pi^2 = 0$$

Luego

$$\lambda_{1,2} = \frac{6\pi \pm \sqrt{36\pi^2 - 36\pi^2}}{18} = \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow y_{h_1} = e^{\frac{\pi x}{3}}, \quad y_{h_2} = e^{\frac{\pi x}{3}}$$

Donde las soluciones que nos arroja este método no son l.i! En este caso, utilizaremos que si $e^{\lambda x}$ es solución de una edo homogénea de orden 2 con coefs constantes, entonces también lo sera $xe^{\lambda x}$.

En efecto, recordando las fórmulas de suma y resta de raíces para una ecuación de segundo grado con raíces iguales: $\lambda = \frac{-b}{2a}$, $\lambda^2 = \frac{c}{a}$

$$a(xe^{\lambda x})'' + b(xe^{\lambda x})' + cxe^{\lambda x}$$

$$= a(e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x})' + b(e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}) + cxe^{\lambda x}$$

$$= a(\lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}) + cxe^{\lambda x}$$

$$= a\lambda^2 x e^{\lambda x} + 2a\lambda e^{\lambda x} + b\lambda x e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} + c x e^{\lambda x}$$

$$= c x e^{\lambda x} - b e^{\lambda x} - \frac{b^2}{2a} x e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} + c x e^{\lambda x}$$

$$= 2 c x e^{\lambda x} - \frac{b^2}{2a} x e^{\lambda x}$$

$$= 2a\lambda^2 e^{\lambda x} - \frac{b^2}{2a} x e^{\lambda x} = 2a \frac{b^2}{4a^2} e^{\lambda x} - \frac{b^2}{2a} x e^{\lambda x}$$

$$= \left(\frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}\right) e^{\lambda x} = 0.$$

Por lo que es también es solución. Ahora, hay que verificar que $x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}$ son l.i. (queda propuesto para uds.)

Una vez corroborado esto, se sigue que

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha e^{x\pi/3} + \beta x e^{x\pi/3}$ es solución de la EDO.

---

b) $y'' + p y' + q y = 0$

Demostraremos que para y_0 solución de la edo

$$p, q > 0 \iff \lim_{t \to \infty} y_0(t) = 0$$

$\Rightarrow$ Suponemos una solución de la forma $e^{\lambda t}$, para

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Caso 1: $p^2-4q=0$

Luego la solución general será de la forma

$$y_0(t) = \alpha e^{-p/2\, t} + \beta t e^{-p/2\, t} \quad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-p/2\, t} = \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$.

$u = -p/2\, t$

$t\to\infty, u\to-\infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{p/2\, t}} = \frac{2}{p}\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^{u}} = 0.$$

$u = p/2\, t$

$t\to\infty, u\to\infty$

ambos existen, así

$$\lim_{t\to\infty} y_0(t) = \alpha \lim_{t\to\infty} e^{-p/2\, t} + \beta \lim_{t\to\infty} t e^{-p/2\, t} = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0.$$

Caso 2: $p^2-4q>0$

Luego la solución general será de la forma para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$y_0(t) = \alpha \exp\left(\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)t\right) + \beta \exp\left(\left(\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)t\right)$$

Donde $\sqrt{p^2-4q} \underset{\text{pues } q>0}{<} p \Rightarrow \dfrac{\sqrt{p^2-4q}-p}{2} < 0$

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left(\frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2}t\right) = \lim_{u\to-\infty} \exp(u) = 0.$$

$u = \dfrac{(\sqrt{p^2-4q}-p)t}{2}$

$t\to\infty, u\to-\infty$

y también $\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} > 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left(-\frac{(p+\sqrt{p^2-4q})}{2}t\right) = \lim_{u\to-\infty} \exp(u) = 0.$$

$$u = -\frac{(\sqrt{p^2-4q}+p)t}{2}$$

$$t\to\infty,\ u\to-\infty$$

Luego

$$\lim_{t\to\infty} y_0(t) = \alpha \lim_{t\to\infty} \exp\left(\frac{(\sqrt{p^2-4q}-p)}{2}t\right) + \beta \lim_{t\to\infty} \exp\left(-\frac{(p+\sqrt{p^2-4q})}{2}t\right)$$

$$= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0$$

Caso 3: $p^2-4q<0$

Luego la solución general será de la forma

$$y_0(t) = \alpha\, e^{-p/2\, t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)t) + \beta\, e^{-p/2\, t}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_1)t),\ \text{para } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Luego

$$0 \le \lim_{t\to\infty} |\alpha e^{-p/2\, t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)t)| = \alpha \lim_{t\to\infty} e^{-p/2\, t}\cdot|\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)t)|$$

$$\le \alpha \lim_{t\to\infty} e^{-p/2\, t} = \alpha\cdot 0 = 0.$$

Por sandwich, $\lim_{t\to\infty} |\alpha e^{-p/2\, t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_1)t)| = 0$

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \left|\beta e^{-P/2\,t} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)\,t)\right| = \beta \lim_{t\to\infty} e^{-P/2\,t} \left|\sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)\,t)\right|$$

$$\leq \beta \lim_{t\to\infty} e^{-P/2\,t} = \beta \cdot 0 = 0$$

Por sandwich, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \left|\beta e^{-P/2\,t} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)\,t)\right| = 0$

Ahora usaremos ⊛ que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \iff \lim_{t\to\infty} |f(t)| = 0$ (intro al cálculo)

Así:

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} |y_0(t)| \leq \lim_{t\to\infty} \left|\alpha e^{-P/2\,t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_1)t)\right| + \left|\beta e^{-P/2\,t} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)t)\right|$$

$$\underset{\phi}{=} \lim_{t\to\infty} \left|\alpha e^{-P/2\,t} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_1)t)\right| + \lim_{t\to\infty} \left|\beta e^{-P/2\,t} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)\,t)\right|$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

pues ambos existen

Por sandwich $\displaystyle\lim_{t\to\infty} |y_0(t)| = 0$. Por ⊛ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$.

En resumen, se tendrá que si asumimos una solución y_0 del tipo $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$.

$\Leftarrow$ Razonando por contradicción, supongamos que

$p \leq 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} y_0(x) = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Caso $p=0$:

subcaso $q=0$: $\underbrace{e^{0x}}$ (pues xe^{0x} también es solución)

$\Rightarrow \lambda = 0$, luego $y_{h_1}(x) = 1$, $y_{h_2}(x) = x$.

$$\lim_{x\to\infty} \alpha x + \beta = \infty \quad \text{⨳}$$

subcaso $q>0$:

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{q} \Rightarrow y(x) = \alpha\cos(\sqrt{q}\,x) + \beta\sin(\sqrt{q}\,x)$

Donde $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ no existe. ⨳

subcaso $q<0$: ($-q$ es un número positivo)

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-q} \Rightarrow y(x) = \alpha e^{\sqrt{-q}\,x} + \beta e^{-\sqrt{-q}\,x}$

Donde $\lim\limits_{t\to\infty} y(x) = \alpha\cdot\infty$ ⨳

Caso $p<0$:

subcaso $q=0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm p}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -p \end{cases} \Rightarrow y(x) = \alpha + \beta e^{-px}$$

como $-p>0$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = \beta \cdot \infty$. $\cancel{\#}$

(*) subcaso $q<0$:

Acá: $p^2-4q>0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Definimos $\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} := \theta > 0$

$$y(x) = \alpha e^{(\theta - \frac{p}{2})x} + \beta e^{-(\theta + \frac{p}{2})x}$$

Así $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha e^{-p/2 x} e^{\theta x} + \beta e^{-\theta x} e^{-p/2 x}$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{px}{2}} \left(\alpha e^{\theta x} + \beta e^{-\theta x} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{px}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\alpha e^{\theta x} + \beta e^{-\theta x} \right)$$

$$= \infty \cdot (\alpha \cdot \infty + \beta \cdot 0)$$

$$= \alpha \cdot \infty \quad \cancel{\#}$$

Subcaso $q>0$:

1) $p^2-4q=0$

$$\Rightarrow y(x) = \alpha e^{-\frac{px}{2}} + \beta x e^{-\frac{px}{2}} = e^{-\frac{px}{2}}(\alpha + \beta x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = \infty \cdot \beta \cdot \infty \rightarrow\!\!\leftarrow$$

2) $p^2-4q>0$. Análogo a ⊛

3) $p^2-4q<0$

$$\Rightarrow y(x) = \alpha e^{-p/2 x}\cos(\sqrt{4q-p^2}\,x) + \beta e^{-p/2 x}\sin(\sqrt{4q-p^2}\,x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y(x) = e^{-p/2 x}\cdot(\alpha\cos(\sqrt{4q-p^2}\,x) + \beta\sin(\sqrt{4q-p^2}\,x))$$

$\Rightarrow$ no existe $\rightarrow\!\!\leftarrow$

Queda propuesto el caso $q<0$, $p>0$. =)

Como todos los casos tales que no se cumple $p,q>0$ dan contradicción, entonces

$\lim_{x\to\infty} y_0(x) = 0 \Rightarrow p,q>0$, y se tiene la equivalencia.