MA2601-3 Ecucaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Michal A. Kowalczyk
Auxiliares: Francisco Castro J. - Benjamín Gallardo A.

Auxiliar 3: EDOs lineales de segundo orden

31 de marzo de 2025

P1. (Resolución: Homogéneas con coeficientes constantes)

a) Encuentre la familia de soluciones de las siguientes EDOs

1. $y'' + y' - 6y = 0$
2. $16y'' - 8y' + 5y = 0$
3. $9y'' - 6\pi y' + \pi^2 y = 0$

P2. Usando el cambio de variable independiente $x = e^z$ resuelva las siguientes EDO's:

1. $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
2. $4x^2y'' - 3y = 0$
3. $x^2y'' + xy' - 16y = 0$

P3. (Caracterización de las soluciones: Homogéneas con coeficientes constantes) Sea y_0 una función (no nula) de la familia de soluciones la EDO dada por

$$y'' + py' + qy = 0,$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$ son constantes fijas. Demuestre que $p, q > 0$, si y solamente si:

$$\lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$$

P4. (Problemas de Cauchy de segundo orden) Resuelva los siguientes problemas de Cauchy:

- $$y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(1) = e^2,\ y'(1) = 3e^2$$
- $$y'' + 4y' + 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$
- $$y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Resumen

Solución ecuación homogénea Para una EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, se tiene una solución para la ecuación homogénea ($Q \equiv 0$) cuya forma depende de las raíces del polinomio característico de la ecuación.

- **Raíces reales y distintas**: Si las raíces de $p(\lambda)$ son λ_1, λ_2 reales y distintas, la solución homogénea es
$$y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$
- **Raíces reales e iguales**: Si las raíces de $p(\lambda)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reales, la solución homogénea es
$$y_h(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$$
- **Raíces complejas**: Si las raíces de $p(\lambda)$ son $\lambda_1 = \sigma + i\omega$, $\lambda_2 = \sigma - i\omega$ complejas conjugadas, la solución homogénea es
$$y_h(x) = e^{\sigma x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

Donde A, B son constantes.

Wronskiano Para una EDO lineal de orden 2 con soluciones linealmente independientes $y_1, y_2 \in C^2(I)$ se define su Wronskiano como

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$