Aquí dejo las respuesta a algunas dudas que surgieron por el correo de u-cursos de cara al C1, ojalá les sirva y éxito en el estudio!!

De acá para abajo $n \in \mathbb{N}$ está fijo e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.

Notación común:

$C^n(I)$ es el conjunto de todas las funciones cuya derivada de orden n está definida en I y es continua.

Como derivable implica continua (y no al revés!!!) se tendrá que las derivadas de f cualquier orden menor a n de también serán continuas

---

Definición de EDO y solución de una EDO!!

Una EDO de orden n en el intervalo I (con incógnita y) es una identidad de esta forma:

$$F(x, y(x), y'(x), .., y^n(x)) = 0, x \in I$$

donde $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función dada.

Diremos que una función $y_0 \in C^n(I)$ es solución de esta EDO si $\forall x \in I, F(x, y_0(x), y_0'(x), .., y_0^n(x)) = 0$.

Importante: Si no se especifica el intervalo I, podemos asumir que se trata del intervalo más grande en donde la igualdad tenga sentido. Esto es muy común.

Ejemplo

Si $n = 1$ y no especificamos I, para

$F(x_1, x_2, x_3) = x_3(1 + x_1^2) - \sec^2(x_2)$, la EDO que resulta es

$$y'(x) = \frac{\sec^2(y(x))}{1 + x^2}$$

En el curso, denotamos para cada $x \in I$ a $y(x)$ como y en las ecuaciones, para no sobrecargar la notación. De igual forma: $\frac{dy}{dx}(x) = y'(x) = y'$. No se confundan, es notación!!! $(*)$

(La vimos en el Aux 1 pero con la notación de $(*)$, además como no dijimos intervalo entonces buscamos el más grande en donde viva x para el cual la igualdad tenga sentido)

Explicación TFC!!

Supongamos que $f : I \text{ abierto} \to \mathbb{R}$ es una función continua fija. Entonces la EDO en I dada por

$$y'(x) = f(x), x \in I$$

se puede trabajar de la siguiente forma:

Primero recordamos lo que era una primitiva:

Definición (Primitiva) Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{Int}(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I ssi

$$\forall x \in \text{Int}(I), \ F'(x) = f(x).$$

Usamos TFC 1:

Teorema 9.2 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). *Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $\text{int}(I)$ *y además* $G' = f$ *en* $\text{int}(I)$.

Como nuestra función f cumple las hipótesis, esto nos dice que (para algún a en nuestro intervalo I) $\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f en I.

Luego, como la función y que buscamos también es una primitiva de f en I (por como definimos la EDO), tenemos que ambas son iguales salvo constante gracias al siguiente resultado, para $F_1 \equiv \int_a^x f(t)dt$ y $F_2 \equiv y$:

1. Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una función f sobre I, entonces:

$$F_1' = f \wedge F_2' = f \Rightarrow (F_1 - F_2)' = 0$$
$$\Rightarrow F_1 - F_2 = \text{cte} = c$$

En consecuencia dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante.

Luego, para alguna constante $c_a \in \mathbb{R}$ se tiene la igualdad:

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt + c_a, x \in I$$

Para no especificar la constante a, denotaremos a $\int_a^x f(t)dt$ por $\int f(t)dt$, simbolizando la elección de cualquier a, pues de igual forma y sin importar el valor de a se cumple que

$$y'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt + c_a\right)' = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Luego

$$y(x) = \int f(t)dt + c$$

soluciona la EDO

TFC 2, para problemas con condiciones iniciales

De acá para abajo $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ están fijos.

Teorema 9.3 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Suponiendo que la EDO de recién era además un problema de Cauchy con condición inicial $y(x_0) = y_0$, también nos es útil el segundo TFC. (De todas formas se podría hacer con el primer TFC, buscando el valor de la constante c como lo hicimos en el Aux 1)

Como f es continua, es integrable. Además, y cumple las hipótesis (pues buscamos una función en $C^1(I)$).

Fijando $x \in I$ arbitrario, buscaremos calcular $\int_{x_0}^x f(t)dt$ (pues de esta forma se definirá una función). Así, aplicaremos el teorema para $F \equiv y$:

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = y(x) - y(x_0)$$

Luego $G(x) := y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$, es tal que:

$$\forall x \in I, y(x) = G(x)$$

Y en efecto, esta función satisface la condición inicial:

$$G(x_0) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = y(x_0) = y(x_0)$$

por lo que es la solución que buscabamos.

Depende de uds elegir cuál de los 2 métodos prefieren

Ejemplo:

Si $f(x) \equiv id(\mathbb{R})$, entonces la EDO queda

$$\frac{dy}{dx}(x) = x$$

Usando por ejemplo el método 1,

$$y(x) = \int x \, dx + c$$

recordando que $\int x \, dx$ es cualquier primitiva de x.

Cualquier otra duda al correo del u-cursos!!