P1

Auxiliar 1

Notación: $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$

a) Siguiendo con la indicación, introduciremos el siguiente c.v. que reducirá el orden de la edo:

Sea $v(t) = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{v}(t) = \ddot{y}(t)$.

Luego, la edo en función de esta nueva variable queda así:

$$\boxed{\dot{v} = g - cv^2}$$

La cual resulta ser una edo lineal de primer orden, lo cual sabemos resolver!

Notamos que la edo es de la forma $\dot{v}(t) = F(v) \cdot G(t)$, para $F(v) = g - cv^2$, $G(t) = 1$. Lo que nos dice que podemos usar separación de variables:

Sin embargo, primero debemos checkear las soluciones constantes, pues no podemos dividir por 0!!!

Asumiendo $v(t)$ constante, nos queda $\dot{v} \equiv 0 = g - cv^2$

$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{g}{c}} = \text{cte.}$ (Donde asumimos que $v \geq 0$)

Habiendo considerado esa solución, podemos continuar para el caso variable:

$$\frac{\dot{v}(t)}{g - c v(t)^2} = 1 \quad , \forall t \geq 0$$

Donde esta igualdad de funciones garantiza que sus primitivas serán las mismas, salvo constante.

$$\Rightarrow \int \frac{\dot{v}(t)}{g - c v(t)^2} dt = \int 1 \, dt + C$$

Paso importante:
Realizamos el cambio de variable trivial $\tilde{v} = v(t)$, es decir, llamamos "$\tilde{v}$" a nuestra nueva variable de integración (No confundir con la función $v(t)$). En Física normalmente se saltan este paso y dividen los diferenciales (ilegal xd)

C.V.
$\tilde{v} = v(t)$
$d\tilde{v} = \dot{v}(t) dt$

$$\Rightarrow \int \frac{d\tilde{v}}{g - c\tilde{v}^2} = t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\int \frac{d\tilde{v}}{g - c\tilde{v}^2} = \frac{1}{g} \int \frac{d\tilde{v}}{1 - \Big(\underbrace{\sqrt{\tfrac{c}{g}}}_{= \alpha}\,\tilde{v}\Big)^2} = \frac{1}{g} \int \frac{d\tilde{v}}{(1 + \alpha\tilde{v})(1 - \alpha\tilde{v})}$$

Haciendo uso de Fracciones parciales:

$$\frac{A}{1 + \alpha\tilde{v}} + \frac{B}{1 - \alpha\tilde{v}} = \frac{1}{(1 + \alpha\tilde{v})(1 - \alpha\tilde{v})}$$

$$\Rightarrow A - \alpha\tilde{v}A + B + B\alpha\tilde{v} = 1 \Rightarrow A = 1 - B,\ B - A = 0$$

$$\Rightarrow A, B = 1/2.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Identidad útil}\\ \displaystyle\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(|a+bx|)\end{array}}$$

Luego

$$\frac{1}{g}\int \frac{d\tilde{v}}{(1+\alpha\tilde{v})(1-\alpha\tilde{v})} = \frac{1}{2g}\int \frac{d\tilde{v}}{1+\alpha\tilde{v}} + \frac{1}{2g}\int \frac{d\tilde{v}}{1-\alpha\tilde{v}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha g}\ln\left(\frac{|1+\alpha\tilde{v}|}{|1-\alpha\tilde{v}|}\right).$$ Volviendo a la ecuación y deshaciendo el cambio de variable:

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{|1+\alpha\tilde{v}|}{|1-\alpha\tilde{v}|}\right) = 2\alpha g t + c,\quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+\alpha v(t)}{1-\alpha v(t)}\right| = \kappa e^{2\alpha g t},\ \kappa > 0 \quad \left(\text{Pues se usó que } e^{x+c} = e^x \cdot \underbrace{e^c}_{\kappa>0} = \kappa e^x\right)$$

Considerando valores positivos y negativos para despejar $v(t)$:

$$1 + \alpha v = \kappa e^{2\alpha g t} - \kappa e^{2\alpha g t} v\alpha \Rightarrow v(t) = \frac{\kappa e^{2\alpha g t} - 1}{\alpha(1+\kappa e^{2\alpha g t})},\quad \kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Luego $\forall \kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la función $v_\kappa(t) = \dfrac{\kappa e^{2\alpha g t} - 1}{\alpha(1+\kappa e^{2\alpha g t})}$ es solución de la edo.

---

b) Recordamos que cuando tratamos con un problema de una edo sujeta a condiciones iniciales, este recibe el nombre de problema de Cauchy. Más adelante en el curso veremos qué condiciones son suficientes para que, dado un problema de Cauchy, este tenga una función que lo solucione. Continuando:

Si parte del reposo, $v(t=0)=0$. Imponiendo esta condición sobre la familia de soluciones:

$$v(0)\overset{!}{=}0=\frac{(Ke^{2\alpha\cdot 0}-1)\alpha}{\alpha+Ke^{2\alpha\cdot 0}}=\frac{K-1}{\alpha(1+K)} \Rightarrow K=1.$$

Luego $v_1(t)=\dfrac{e^{2\alpha g t}-1}{(1+e^{2\alpha g t})\alpha}$ soluciona el problema de Cauchy.

c) La velocidad terminal del cuerpo será la velocidad que este alcance luego de estar mucho tiempo cayendo, es decir, cuando $t\to\infty$. Así:

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(e^{2\alpha g t}-1)\alpha}{\alpha+e^{2\alpha g t}}=\alpha\lim_{t\to\infty}\frac{1-\cancel{e^{-2\alpha g t}}^{\,0}}{(\cancel{e^{-2\alpha g t}}_{\,0}+1)\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

Por lo que luego de estar mucho tiempo cayendo, el cuerpo alcanzará una velocidad terminal de $\boxed{\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{g}{C}}}$

Nota: este problema también se podía hacer con solución general/Factor integrante.

P2

Recuerdo (IPP):

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$1 = \quad y' = \ln(x)$

Nos encontramos ante la versión más simple de una edo, pues esta se puede resolver vía integración directa. En efecto;

Ambos funciones ($y'(x)$, $\ln(x)$) tendrán la misma primitiva salvo cte:

$\int y'(x) = \int \ln(x) + C$. Sabemos de cálculo que $\int y'(x) = y(x)$, por lo que nos falta calcular el lado izquierdo de la igualdad. Usando IPP

$$\int \ln(x)dx = \ln(x)x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)x - \int dx = \ln(x)x - x\,.$$

$u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}$

$v = x$, $dv = 1$

Así $\forall c \in \mathbb{R}$, $y_c(x) = \ln(x)x - x + c$ es solución de la edo.

2.- $y' = \dfrac{\sec^2(y)}{1+x^2}$

Notamos que la edo es de la forma $y' = F(y) \cdot G(x)$, para $F(y) = \sec^2(y)$, $G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ por lo que separamos variables:

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Luego sus primitivas son iguales salvo cte:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Primitiva conocida} \\ \int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\end{array}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{\sec^2(y(x))}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + c.$$

c.v. $y = y(x)$, $dy = y'(x)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sec^2(y)} = \operatorname{arctg}(x) + c \Rightarrow \int \cos^2(y)\,dy = \operatorname{arctg}(x) + c.$$

Para resolver la primitiva, usamos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \Rightarrow \int \cos^2(y)\,dy = \int \frac{1}{2}\,dy + \int \frac{\cos(2y)\,dy}{2}$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4}.$$

Volviendo a la ecuación y deshaciendo el c.v:

$$\frac{y(x)}{2} + \frac{\sin(2y(x))}{4} = \operatorname{arctg}(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Llegados a este punto, notamos que no podemos seguir despejando $y(x)$; por lo que decimos que hemos encontrado la solución implícita de la edo.

3.- $x^2y' = y^2 + 2xy$

Introduciremos un c.v. que convertiva la edo en una de la Forma $s'(t) = F(s)\cdot G(t)$, para utilizar separación de variables:

$$x^2y' = y^2 + 2xy \;\Big|\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}.$$

Sea $u = \frac{y}{x}$, luego $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$\Rightarrow u'x + u = u^2 + 2u \Rightarrow u' = \frac{u^2+u}{x}.$$

Usamos separación:

$$\frac{u'}{u(u+1)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{u'(x)\,dx}{u(x)(u(x)+1)} = \int\frac{dx}{x} + c \;;$$

sea $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u(u+1)} = \ln(x) + c,\; c \in \mathbb{R}$$

Usamos fracciones parciales:

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)} \Rightarrow Au + A + Bu = 1 \Rightarrow A = 1,\; B = -1.$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u(u+1)} = \int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u+1} = \ln(|u|) - \ln(|u+1|) = \ln\left(\left|\frac{u}{u+1}\right|\right)$$

Volviendo a la edo y deshaciendo un c.v:

$$\ln\left(\left|\frac{u(x)}{u(x)+1}\right|\right) = \ln(x) + c \Rightarrow \left|\frac{u(x)}{u(x)+1}\right| = kx \;,\; k > 0.$$

Buscamos valores positivos y negativos:

$$u(x) = kx\,u(x) + kx \Rightarrow u(x) = \frac{kx}{1-kx},\; k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$(y = ux)$

Deshaciendo el c.v resulta que

$$\forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\; y_k(x) = \frac{x^2}{1/k - x}$$ es solución de la edo.

(Nota: el orden de una edo es la derivada mas grande de la función incognita que aparece en la ecuación)

4.- $y' + \cot g(x) y = 2x \operatorname{cosec}(x)$

Para esta edo, utilizaremos la solución general para edos lineales de primer orden, también llamado método del factor integrante.

Recordemos este método, consideramos una edo lineal de primer orden cualquiera: $a_1(x) y' + a_0(x) y = s(x)$.

Para simplificar el problema, para $a_1(x) \neq 0$ normalizamos la edo $\left(/ \cdot \frac{1}{a_1(x)}\right)$. Considerando $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $b(x) = \frac{s(x)}{a_1(x)}$:

$$\boxed{y' + p(x) y = b(x)}$$

el lado derecho, no está acompañado por "$y(i)$".

Notamos que el lado izquierdo se parece a la forma $(fg)' = f'g + fg'$, por lo que nos gustaría que quede explícitamente de esa forma:

Si multiplicamos la edo por el factor conveniente $\exp(\int p(x))$ sigue que:

$$y' \exp(\int p(x)) + \exp(\int p(x)) p(x) y = b(x) \exp(\int p(x))$$

$$\Rightarrow (y \exp(\int p(x)))' = b(x) \exp(\int p(x)), \quad / \text{derivada del producto } fg, \text{ para } f = y, \ g = \exp(\int p(x))$$

$$\Rightarrow y \exp(\int p(x)) = \int b(x) \exp(\int p(x)) dx + c$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{e^{-\int p(x)} \int b(x) \exp(\int p(x)) dx}_{\text{Solución particular}} + \underbrace{c e^{-\int p(x)}}_{\text{Solución homogénea}}, \text{ que soluciona la edo.}$$

Nota: La solución particular recibe este nombre porque este término aparece particularmente cuando la edo es no homogenea, i.e. lado derecho $b(x) \neq 0$. La sol homogenea aparece independiente la función $b(x)$.

¿Como saber cuando una edo es lineal?

Para que una edo sea lineal se debe poder escribir como un "polinomio" de Funciones, de la forma:

Este sería un "polinomio usual"

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = b(x) \quad \approx \quad \boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$$

↳ lado derecho, si $b \equiv 0$, la edo es homogénea.

EDO — POLINOMIO

donde las funciones $a_i(x)$ cumplen el rol de "escalares" en un polinomio usual y la derivada i-esima $y^{(i)}$ de la Función incógnita cumple el rol del exponente i-esimo de la variable x del polinomio. (convención $y^{(0)} = y$)

Aclaración: si k es una cte, $f \equiv k$ se lee como "la Función idénticamente igual a k" o la función cte igual a k"

Ejemplos:

La edo $y'' + x^2 y = \operatorname{arctg}(x^3)$ es lineal, con
$$\begin{cases} a_2(x) \equiv 1 \\ a_1(x) \equiv 0 \\ a_0(x) = x^2 \\ b(x) = \operatorname{arctg}(x^3) \end{cases}$$

La edo $3y^2 + y' = 0$ no es lineal, pues su término "y^2" impide que sea de la Forma recién discutida.

$(a_1(x) \equiv 1,\ a_2(x) = \operatorname{cotg}(x),\ b(x) = 2x\operatorname{cosec}(x))$

Volviendo al problema, en efecto la edo es lineal de orden 1 por lo que ocupamos la solución general:

$$\int p(x) = \int \operatorname{cotg}(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) = \ln(|\sin(x)|) \underset{*}{=} \ln(\sin(x))$$

$u = \sin(x)$
$du = \cos(x) dx$

*Asumiremos x tq $\sin(x) \geq 0$.

$$\Rightarrow \exp\left(\int p(x)\right) = \sin(x),\ \exp\left(-\int p(x)\right) = \frac{1}{\sin(x)}$$

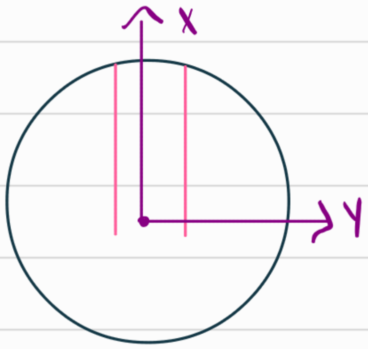
$$\Rightarrow \int b(x)\exp\left(\int p(x)\right) = \int 2x\operatorname{cosec}(x)\cdot\sin(x) = \int 2x\,dx = x^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cdot x^2 + c \cdot \frac{1}{\sin(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Así $\forall c \in \mathbb{R}$, $y_c(x) = \frac{x^2}{\sin(x)} + \frac{c}{\sin(x)}$ es solución de la edo.

Cualquier duda correo por u-cursos =)

P3. (Viaje al centro de la tierra.) En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia desde el centro. Si se perfora un agujero en la Tierra de polo a polo y se deja caer una piedra en él, ¿con qué velocidad alcanzará el centro?



Definimos el sist. de referencia como a la izq.

$$F_g = Cx$$

Recordamos entonces de las eyes de Newton:

$$F_g = ma$$

Asumiendo que la roca tiene una masa m, podemos plantear la ec como sigue:

$$m\ddot{x} = Cx$$

Para despejar C, recordamo que si $x=R$, la aceleraø es g, de lo que deducimos:

$$mg = CR \iff C = -\frac{mg}{R}$$

Finalm., la ec. es de la forma:

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\frac{\cancel{m}g}{R}x \quad \checkmark$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x$$

Ahora, resolvemos la EDO con el objetivo de despejar $\dot{x} = v$. Podemos escribir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Y entonces por regla de la cadena

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{R}x$$

Usando variables separables:

$$\int v\,dv = -\frac{g}{R}\int x\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{R}\frac{x^2}{2} + C$$

$$\therefore v = \sqrt{-\frac{g}{R} x^2 + C}$$

Saquemos la cte. si $v(R) = 0$, entonces

$$0 = -\frac{g}{\cancel{R}} \cdot \underline{R^{\cancel{2}}} + C$$

$$\Leftrightarrow C = Rg$$

Como nos piden la soluø en el centro, esto es cuando $x = 0$. Así, tenemos qué

$$v^* = \sqrt{Rg}$$

//

P4. (Bernoulli.)[Propuesto] La ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal cuano $n = 0$ o $n = 1$. demuestre que puede reducirse a una ecuación lineal para cualquier n mediante el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método a las siguientes ecuaciones:

- $xy' + y = x^4y^3$;
- $xy^2y' + y^3 = xcos(x)$;
- $xdy + ydx = xy^2dx$

Escribimos:

$$Y' + P(X)Y = Q(X)Y^n, \quad \text{con } n \neq 0, n \neq 1$$

Si realizamos el cambio de variable

$$Z = Y^{1-n} \Rightarrow Z' = (1-n)Y^{-n}Y'$$

Multiplicando la ec. por ambos lados por $(1-n)Y^{-n}$ nos queda:

$$(1-n)Y^{-n}Y' + (1-n)P(X)\underbrace{Y^{-n}\cdot Y}_{Y^{1-n}} = Q(X)\underbrace{Y^nY^{-n}}_{1}(1-n)$$

$$\underbrace{(1-n)Y^{-n}Y'}_{Z'} + (1-n)P(X)\underbrace{Y^{1-n}}_{Z} = Q(X)(1-n)$$

$$Z' + (1-n)P(X)Z = (1-n)Q(X)$$

Que es una EDO lineal no homogénea.

Veamos los ejemplos:

- $xy' + y = x^4y^3$; ☆

Lo primero es identificar la forma de Bernoulli:

$$XY' + Y = X^4Y^3 \quad /\cdot 1/X, \quad X \neq 0$$

$$Y' + \frac{Y}{X} = X^3\underline{Y^3}$$

$$P(X) = 1/X, \quad Q(X) = X^3, \quad \underline{n = 3} \rightarrow \text{depende del } Y!$$

Así, nuestro cambio de variable:

$$Z = Y^{1-3} = Y^{-2} \Rightarrow Z' = -2Y^{-3}\cdot Y'$$

Multiplicamos por $-2Y^{-3}$ y nos queda:

$$-2Y^{-3}Y' - 2Y^{-3}\cdot\frac{Y}{X} = -2Y^{-3}Y^{3}X^{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Z' - \frac{2}{X}Z = -2X^{3}$$

$$\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

Usaremos factor integrante:

$$\mu(X) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = X^{-2}$$

Así:

$$Z'X^{-2} - 2X^{-3}Z = -2X$$

$$\Leftrightarrow \quad (ZX^{-2})' = -2X \quad / \int dx$$

$$\Leftrightarrow \quad ZX^{-2} = \int -2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad ZX^{-2} = -\cancel{2}\frac{X^2}{\cancel{2}} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad Z = X^{2}(-X^{2} + C)$$

Ahora sacamos el cambio de variable:

$$Y^{-2} = X^{2}(-X^{2}+C)$$

$$Y = [X^{2}(-X^{2}+C)]^{-1/2}$$

- $xy^2y' + y^3 = xcos(x)$;

$$XY^2Y' + Y^3 = X\cos(X) \quad / \ ^1/_{XY^2} \quad , X \neq 0, Y \neq 0$$

$$Y' + \frac{Y}{X} = \cos(X)Y^{-2}$$

$P(X) = 1/X$, $Q(X) = \cos(X)$, $n = -2$

Hacemos el cambio de variable:

$$Z = Y^{1-(-2)} = Y^3 \Rightarrow Z' = 3Y^2\cdot Y'$$

Multiplicamos por: $3Y^2$

$$3y^2y' + \frac{3y^3}{x} = 3\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad z' + \frac{3}{x}z = 3\cos(x) \;/\; e^{3\int \frac{1}{x}dx} = e^{3\ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad z'x^3 + 3x^2z = 3\cos(x)x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (zx^3)' = 3\cos(x)x^3 \;/\int$$

$$\Leftrightarrow \quad zx^3 = \underbrace{3\int \cos(x)x^3\,dx}_{I}$$

I) $$3\int \cos(x)x^3\,dx = 3x^3\sin(x) - \underbrace{9\int \sin(x)x^2\,dx}_{II}$$

$u = x^3 \quad du = 3x^2$

$dv = \cos(x) \quad v = \sin(x)$

II) $$9\int \sin(x)x^2\,dx = -9x^2\cos(x) + \underbrace{18\int \cos(x)x\,dx}_{III}$$

$u = x^2 \quad du = 2x$

$dv = \sin(x) \quad v = -\cos(x)$

III) $$18\int \cos(x)x\,dx = 18x\sin(x) - 18\underbrace{\int \sin(x)\,dx}_{= -\cos(x)}$$

$u = x \quad du = 1$

$dv = \cos(x) \quad v = \sin(x)$

Así, la soluc es:

$$zx^3 = 3x^3\sin(x) - (-9x^2\cos(x) + 18x\sin(x) + 18\cos(x)) + C$$

$$\Leftrightarrow z = 3\sin(x) + \frac{9}{x}\cos(x) - \frac{18}{x^2}\sin(x) + \frac{18}{x^3}\cos(x) + C$$

Si sacamos el cambio de variable queda

$$y = \left[3\sin(x) + \frac{9}{x}\cos(x) - \frac{18}{x^2}\sin(x) + \frac{18}{x^3}\cos(x) + C\right]^{1/3}$$

- $xdy + ydx = xy^2dx$

$$x\,dy + y\,dx = xy^2dx \quad / \tfrac{1}{x}dx$$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2$$

$P(x) = 1/x$, $Q(x) = 1$, $n = 2$

Así, usamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$$

Multiplicamos por $-y^{-2}$ y nos queda:

$$-y'y^{-2} - \frac{y^{-1}}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \frac{z}{x} = 1 \quad / \cdot \; e^{-\int \frac{1}{x}dx} = x^{-1}$$

$$z'x^{-1} - zx^{-2} = x^{-1}$$

$$(zx^{-1})' = x^{-1} \quad / \int dx$$

$$zx^{-1} = \int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c$$

$$z = x(\ln(x) + c)$$

Si sacamos el cambio de variable

$$y = [x(\ln(x) + c)]^{-1} \quad //$$