

MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**Profesor:** Michal A. Kowalczyk**Auxiliares:** Rocío Yáñez T. - Benjamín Gallardo A.**Auxiliar 1: Métodos de resolución**

17 de marzo de 2025

P1. (Reducción de orden, Problema de Cauchy)

Con el objetivo de volver más realista el clásico modelo físico de un cuerpo en caída libre, consideraremos el cómo afecta la resistencia del aire en su descenso. Para esto, incluiremos un nuevo término en su ecuación de movimiento que representará este fenómeno:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - c\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

donde g es la aceleración de la gravedad, c es una constante que dependerá de la masa del objeto y la incógnita $y(t)$ representa su altura en función del tiempo.

- Reescriba la EDO de forma que la velocidad $v(t)$ de caída del cuerpo resulte ser la nueva incógnita, y encuentre la familia de soluciones de esta nueva ecuación.
- Suponiendo que en $t = 0$ el cuerpo se deja caer del reposo, encuentre una solución $v(t)$ para el problema con condiciones iniciales.
- Estudie la **velocidad terminal** del cuerpo bajo estas condiciones iniciales.
- Propuesto:* Encuentre la solución $y(t)$ de la EDO original.

P2. (Integración directa, Separación de variables y Factor Integrante)

Encuentre la familia de soluciones de las siguientes EDOs

1. $y' = \ln(x)$

2. $y' = \frac{\sec^2(y)}{1 + x^2}$

3. $x^2y' = y^2 + 2xy$

4. $y' + \cot g(x)y = 2x \operatorname{cosec}(x)$

P3. (Viaje al centro de la tierra.)

En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia desde el centro. Si se perfora un agujero en la Tierra de polo a polo y se deja caer una piedra en él, ¿con qué velocidad alcanzará el centro?

P4. (Bernoulli.) La ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal cuando $n = 0$ o $n = 1$. demuestre que puede reducirse a una ecuación lineal para cualquier n mediante el cambio de variable $z = y^{1-n}$, y aplique este método a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \blacksquare & xy' + y = x^4y^3 & xy^2y' + y^3 = x \cos(x) \quad x dy + y dx = xy^2 dx \end{array}$$

P5. (Mezclitas.) [Propuesto] Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 litros de agua, en los que se han disuelto 50 kg de sal. Otra salmuera introducida al tanque a una razón de 3 L/min y cuando la solución está bien mezclada sale a una razón lenta de 2 L/min. Si la concentración de la solución que entra es 2 Kg/L, determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad de sal $A(t)$ que hay en el tanque al tiempo t .

Resumen

Def. 1 (Ecuación Diferencial Ordinaria): Si una ecuación contiene solo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una *Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)*.

Def. 2 (Orden de una EDO): El orden de una EDO es el orden de la mayor derivada de la ecuación. Podemos expresar una EDO de n -ésimo orden como:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Donde F es una función real de $n+2$ variables: $x, y, y', \dots, y^{(n)}$

Def. 3 (EDO lineal): Una *EDO lineal de orden n* es de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

donde las funciones $a_i(x)$ son llamadas coeficientes de la EDO.

En el siguiente cuadro se resumen algunas características de las EDO's lineales.

n	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i, a_i = cte$	coeficientes constantes
$\exists i, a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

CUADRO 1. Clasificación de la EDO lineal $\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)} = Q(x)$.

Def. 4 (EDOs lineales elementales): Existen cuatro tipos de ecuaciones que llamaremos *elementales*:

- integración directa: $y' = f(x)$
- variables separables: $y' = f(x)g(y)$
- lineal de primer orden homogénea: $y' + \bar{a}_0(x)y = 0$
- lineal de primer orden no homogénea: $y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$

Teo. 1 (Teorema fundamental del cálculo): Sea f integrable en $[a, b]$, entonces, dado $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, la función y , definida por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)ds, \quad \text{para } x \in [a, b],$$

es continua en $[a, b]$ y se tiene $y(x_0) = y_0$. Si además f es continua en $[a, b]$ entonces la función $y(x)$ es también derivable en $[a, b]$ con derivada continua igual a $f(x)$, esto es, se tiene que

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(s)ds, \quad \forall x \in [a, b] \\ \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(s)ds &= f(x) \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Def. 5 (EDO no lineal): Una *EDO no lineal* es una EDO que no es lineal.