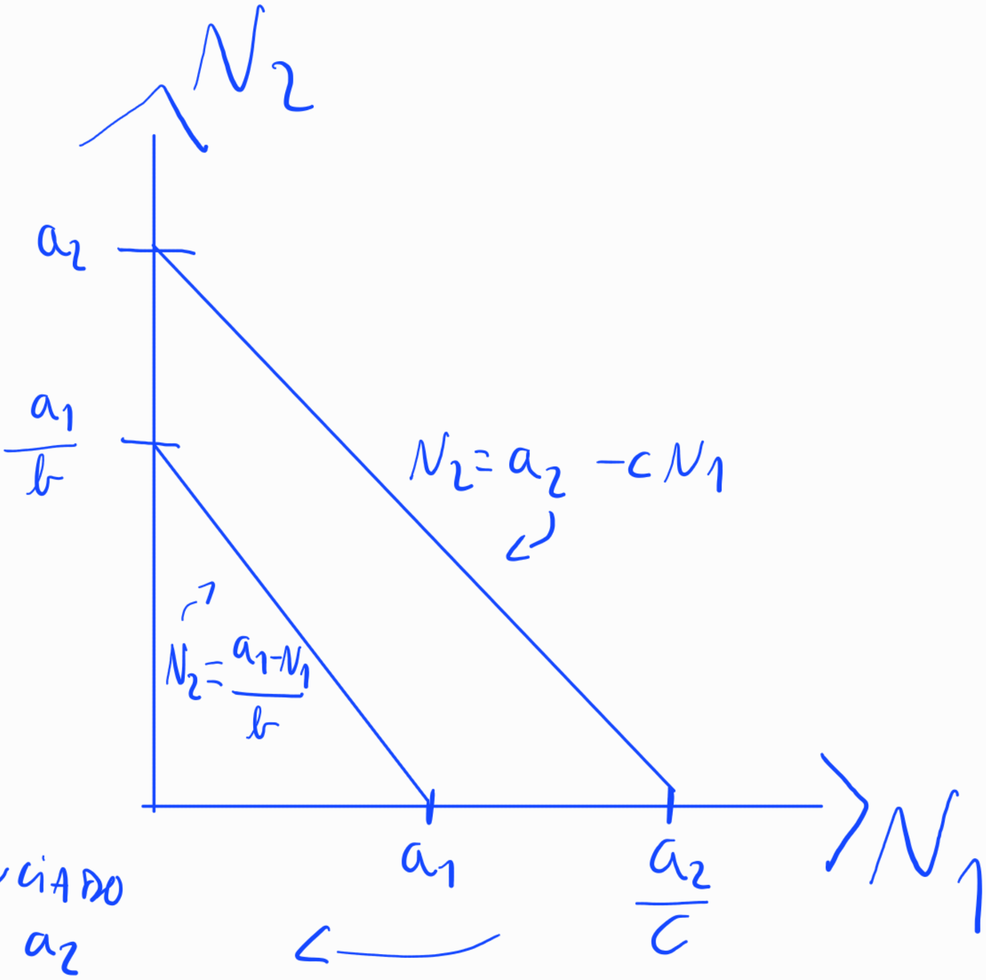
P1

a) GRAFICAMOS LAS NULCLINAS

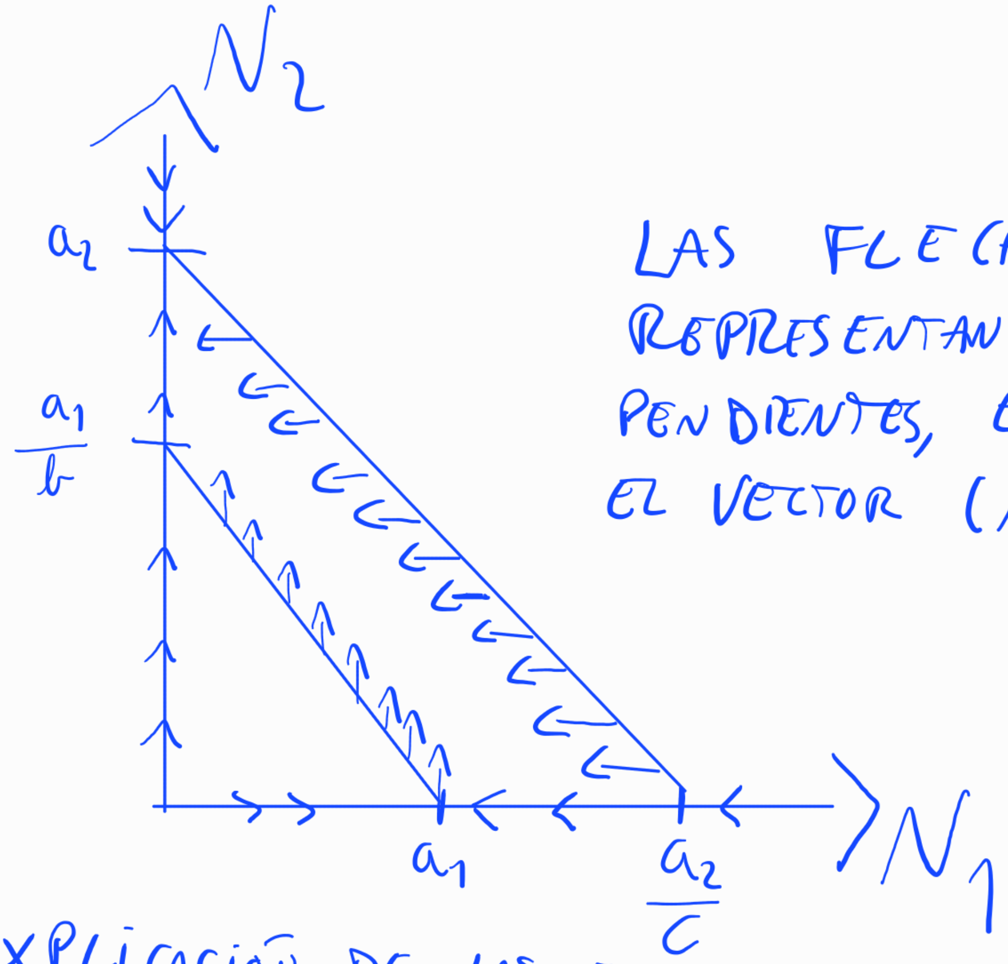
ENUNCIADO
$a_2 > \frac{a_1}{b}$



ENUNCIADO
$a_1 < \frac{a_2}{c}$

AHORA PARA DIBUJAR LAS FLECHAS VEMOS LOS SIGNOS DE (N_1', N_2') EN CADA PARTE DEL GRÁFICO.

PRIMERO VEAMOS LAS FLECHAS EN LAS NULCLINAS Y EN LOS EJES



LAS FLECHAS REPRESENTAN LAS PENDIENTES, ES DECIR, EL VECTOR (N_1', N_2')

EXPLICACIÓN DE LAS FLECHAS:

- NOTEMOS QUE SI $N_1=0$, $N_2'>0$ EN $(0, a_2)$, PUES $N_2' = N_2(a_2 - N_2)$.
  POR LO MISMO $N_2'<0$ EN (a_2, ∞^+).

- ANALOGAMENTE SI $N_2=0$, $N_1'>0$ EN $(0, a_1)$ Y $N_1'<0$ EN (a_1, ∞^+).

- EN LA NUCLINA $N_2 = \frac{a_1 - N_1}{b}$ SE ANULA N_1 Y SE TIENE QUE

$$N_2' = N_2(a_2 - N_2 - cN_1) = N_2(a_2 - N_2 - ca_1 + cbN_2)$$

$= N_2(a_2 + N_2(cb-1) - ca_1)$, COMO

$a_2 - ca_1 > 0$ Y ASUMIENDO $cb > 1$

SE TIENE $N_2' > 0$

- EN LA NULCLINA $N_2 = a_2 - cN_1$ SE ANULA N_2' Y TENEMOS QUE

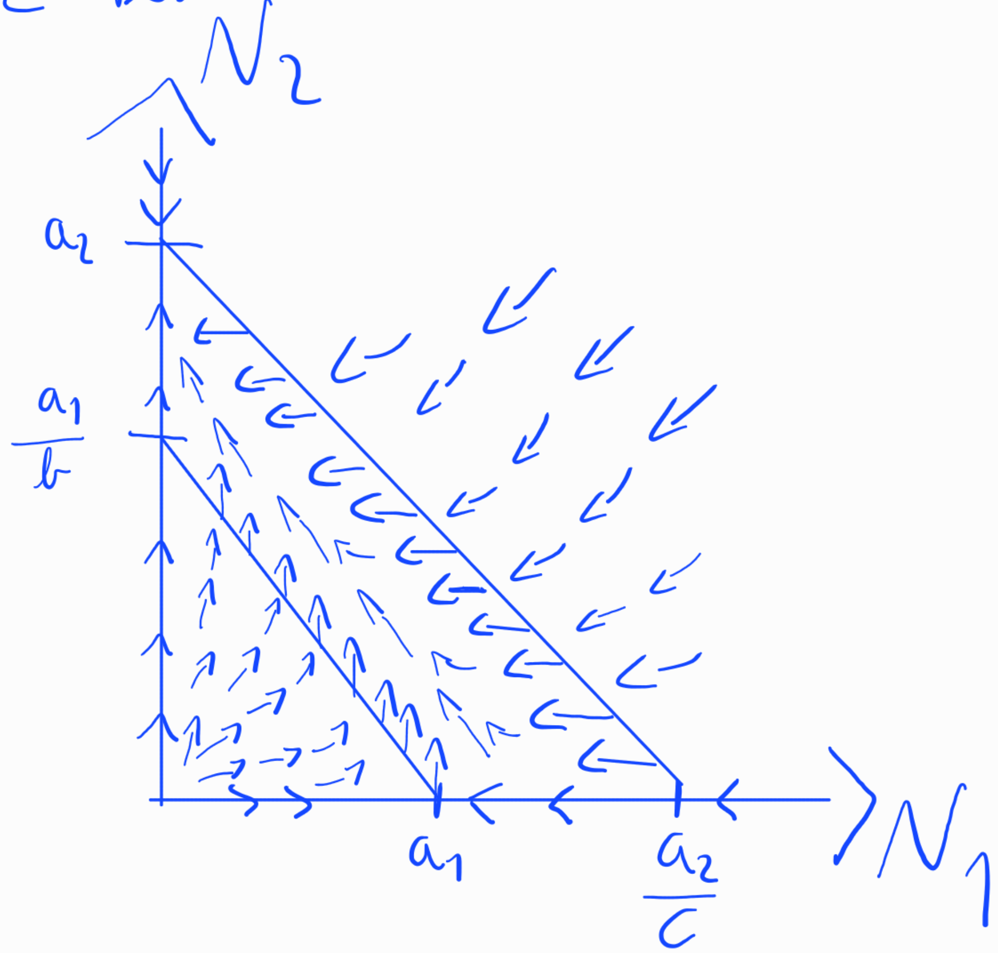
$N_1' = N_1(a_1 - N_1 - bN_2) = N_1(a_1 - N_1 - ba_2 + bcN_1)$

$= N_1(a_1 - ba_2 + N_1(bc-1))$. COMO

$a_1 - ba_2 < 0$ TENDREMOS QUE $N_1' < 0$.

AHORA VEAMOS EL RESTO DE FLECHAS.

SIGUIENDO LA TRAYECTORIA DELIMITADA POR LAS FLECHAS ANTERIORES, COMPLETAMOS EL BOSQUEJO



b) VEAMOS LOS EQUILIBRIOS:

(1) $N_1' = 0 \iff N_1 = 0 \lor N_1 = a_1 - bN_2$

(2) $N_2' = 0 \iff N_2 = 0 \lor N_2 = a_2 - cN_1$

- SI $N_1 = 0$, REEMPLAZANDO EN (2) TENEMOS EL PUNTO $(0,0)$ Y $(0, a_2)$

- SI $N_1 = a_1 - bN_2$ Y REEMPLAZO EN (2): TENGO POR $N_2 = 0$ EL PUNTO $(a_1, 0)$

Y POR $N_2 = a_2 - cN_1$ OBTENGO

$$N_2 = a_2 - ca_1 + cbN_2 \Rightarrow N_2 = \frac{a_2 - ca_1}{1-cb} > 0$$

$$\Rightarrow N_1 = a_1 - \frac{a_2 b - bca_1}{1-cb} = \frac{a_1 - \cancel{cba_1} - a_2 b + \cancel{bca_1}}{1-cb}$$

$$= \frac{a_1 - a_2 b}{1-cb} < 0$$

Y TENEMOS $\left(\frac{a_1 - a_2 b}{1-cb}, \frac{a_2 - ca_1}{1-cb} \right)$

QUE POR LAS DESIGUALDADES DEL ENUNCIADO NUNCA ESTARÁ EN EL PRIMER CUADRANTE.

- PARA LA LINEALIZACIÓN CALCULAMOS EL JACOBIANO.

$$J(N_1, N_2) = \begin{pmatrix} \frac{dN_1'}{dN_1} & \frac{dN_1'}{dN_2} \\ \frac{dN_2'}{dN_1} & \frac{dN_2'}{dN_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - 2N_1 - bN_2 & -bN_1 \\ -cN_2 & a_2 - 2N_2 - cN_1 \end{pmatrix}$$

• EVALUAMOS EL JACOBIANO EN LOS PTOS CRITICOS:

1) $J(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$

SACAMOS VALORES PROPIOS

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & 0 \\ 0 & a_2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_1-\lambda)(a_2-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a_1, \quad \lambda_2 = a_2 \;//$$

PARTE REAL POSITIVA LOS 2 (INESTABLE)

2) $J(0,a_2) = \begin{pmatrix} a_1-b a_2 & 0 \\ -c a_2 & -a_2 \end{pmatrix}$

V.P:

$$\begin{vmatrix} a_1-b a_2-\lambda & 0 \\ -c a_2 & -a_2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a_1-b a_2-\lambda)(a_2+\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -a_2 < 0, \quad \lambda_2 = a_1 - b a_2 < 0$$

AMBOS V.P. SON NEGATIVOS (ESTABLE)

3) $J(a_1,0) = \begin{pmatrix} -a_1 & -b a_1 \\ 0 & a_2 - c a_1 \end{pmatrix}$

V.P.:

$$\begin{vmatrix} -a_1-\lambda & -b a_1 \\ 0 & a_2-c a_1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a_1+\lambda)(a_2-c a_1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -a_1 < 0, \; \lambda_2 = a_2 - c a_1 > 0$

HAY UN V.P. NEGATIVO. (INESTABLE)

- COMO EL OTRO PUNTO NO ESTÁ EN EL 1er CUADRANTE, LO IGNORAMOS

c) SI $N_1(t_0) = 0, N_2(t_0) = 0 \Rightarrow N_1(t) \equiv 0, N_2(t) \equiv 0$ $\forall t$, POR TEU. (SE EXTINGUIERON)

CONSIDERANDO $N_1(t_0) \geq 0, N_2(t_0) \geq 0$ LAS SOLUCIONES SE QUEDARÁN EN EL PRIMER CUADRANTE Y SI PARTEN CON UNA POBLACIÓN NO NULA ($N_1(t_0) > 0, N_2(t_0) > 0$) TENDERÁN AL EQUILIBRIO $(0, a_2)$, PUES ES EL ÚNICO ESTABLE EN EL CUADRANTE. SE INTERPRETA COMO QUE N_2 ES COMPETITIVAMENTE SUPERIOR A N_1.

P2)

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - cN - P)$$

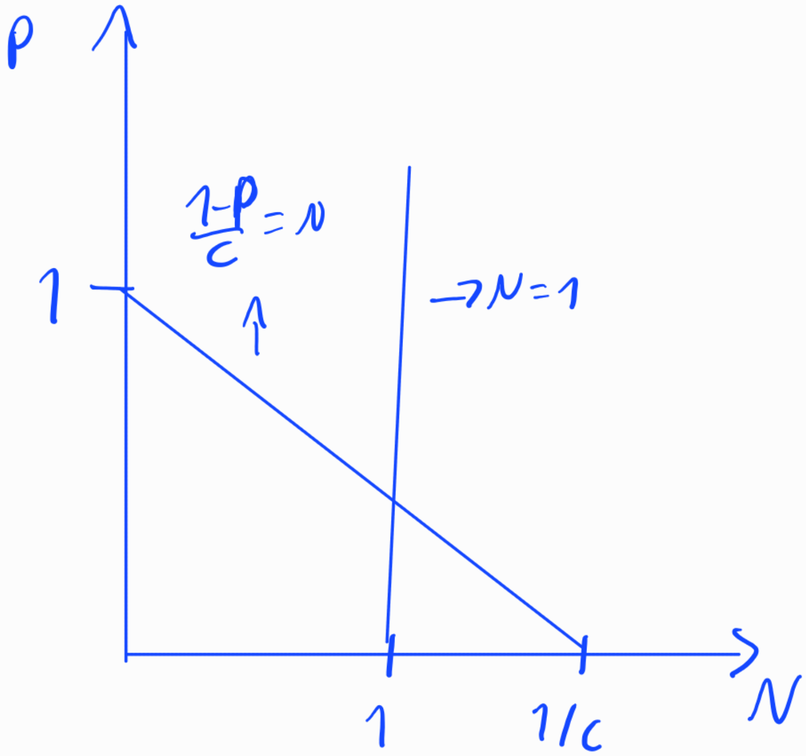
$$\frac{dP}{dt} = P(N-1)$$

, $c>0$, $N(t_0)>0$
$P(t_0)>0$

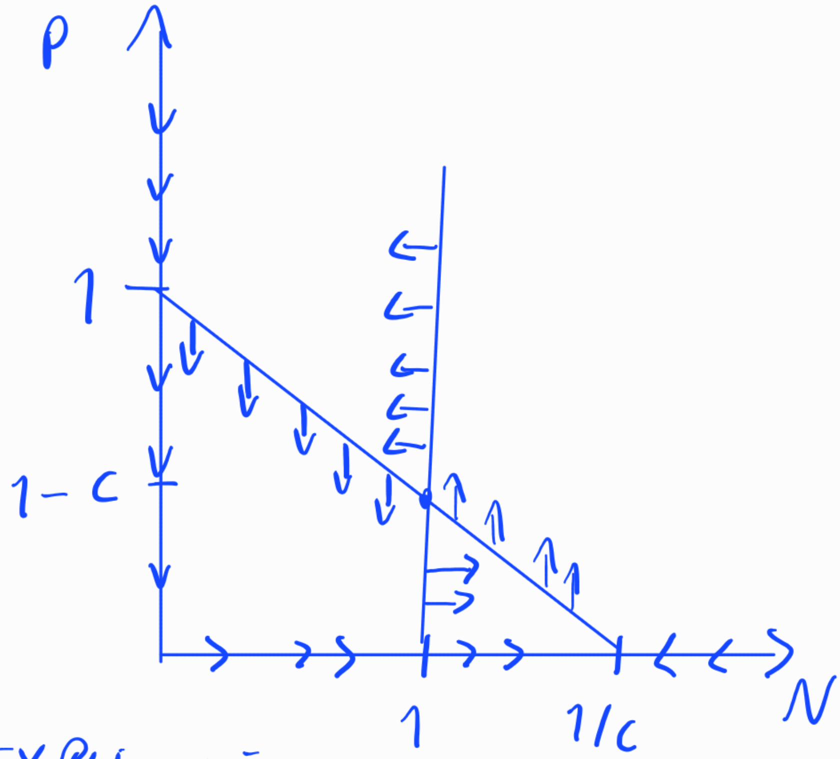
a) LAS NULCLINAS SON :

$$\frac{1-P}{c} = N \, , \qquad N=1.$$

$c<1$) EL GRÁFICO DE LAS NULCLINAS ES



AHORA AGREGAMOS LAS FLECHAS DONDE LA PENDIENTE ES 0 (NULCLINAS Y EJES)



EXPLICACIÓN:

1) SI $N=0 \Rightarrow P' = P(-1) = -P < 0$

2) SI $P=0 \Rightarrow N' = N(1-cN) \Rightarrow N' < 0$ EN $(\frac{1}{c}, \infty^+)$
Y $N' > 0$ EN $(0, \frac{1}{c})$

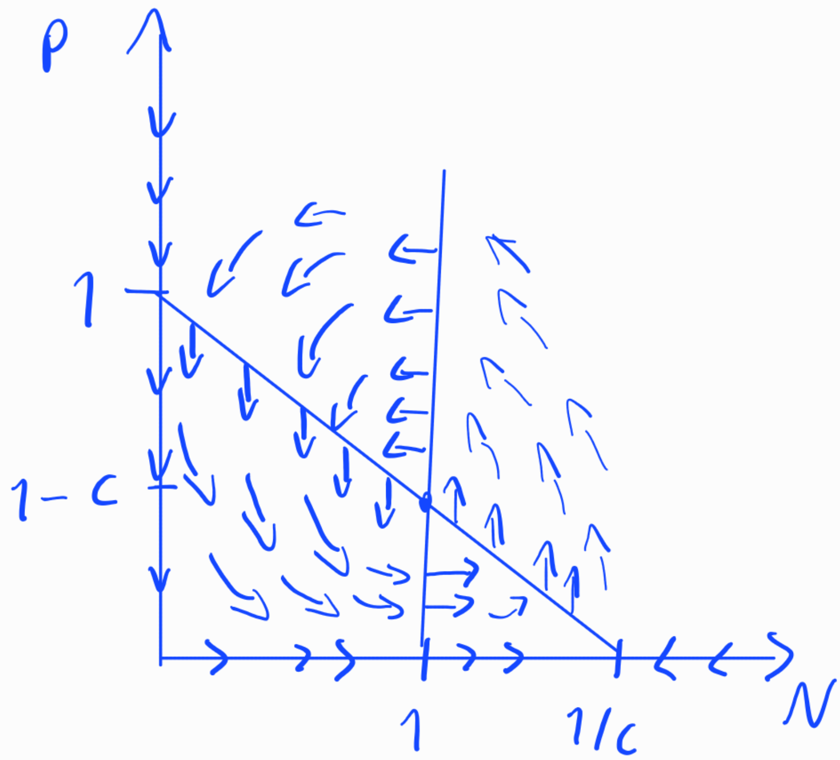
3) NULCLINA $N=1 \Rightarrow P' = 0$, $N' = (1-c-P)$
$\Rightarrow N' > 0$ CUANDO $P \in (0, 1-c)$ Y $N' < 0$ CUANDO
$P \in (1-c, \infty^+)$

4) NULCLINA $\frac{1-P}{c} = N \Rightarrow N' = 0$, $P' = P(\frac{1-P}{c} - 1)$

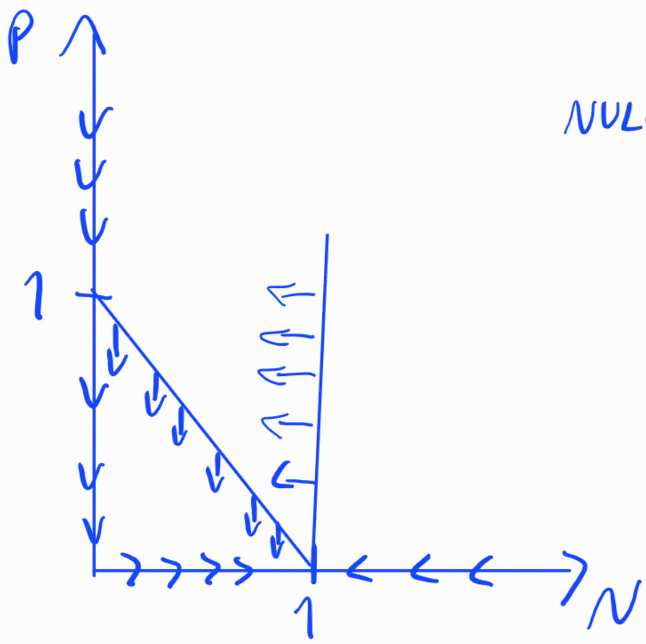
$\Rightarrow P' = P(\frac{1-P-c}{c})$, SIMILAR AL ANTERIOR $P' > 0$ SI $P \in (0, 1-c)$

Y $P' < 0$ SI $P \in (1-c, \infty^+)$.

LUEGO SIGUIENDO LA ORIENTACIÓN DEL ESQUEMA COMPLETAMOS EL BOSQUEJO.



CASO $c = 1$)



NULCLINAS: $N = 1$

$N = 1 - P$

JUSTIFICACIÓN:

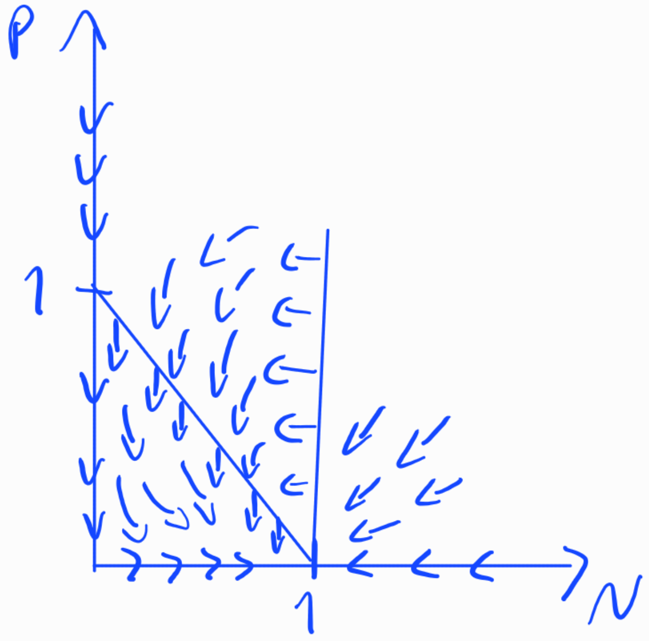
1) NULCLINA $N = 1 \to (0, -N \cdot P) \rightsquigarrow \left(\frac{dP}{dt}, \frac{dN}{dt}\right)$

2) NULCLINA $N = 1 - P \to (-P^2, 0)$

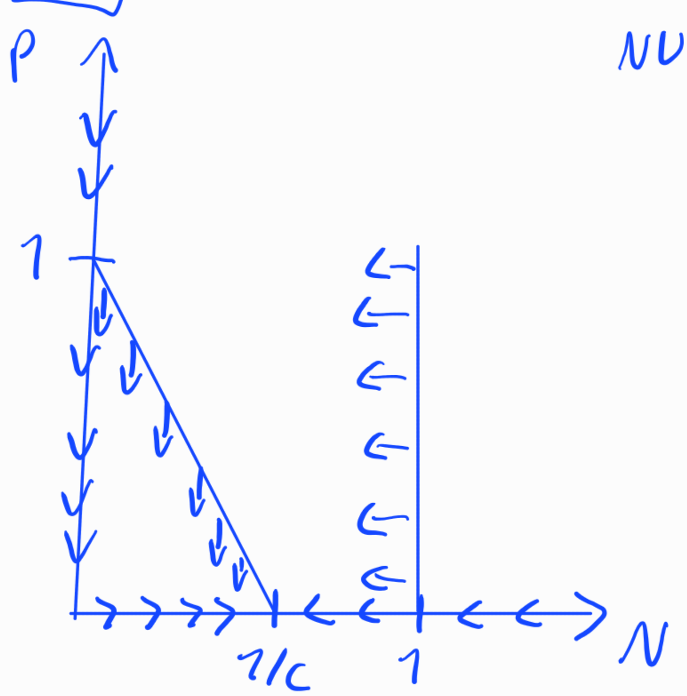
3) $N = 0 \to (-P, 0)$

4) $P = 0 \to (N(1-N), 0)$

COMPLETANDO:



CASO $\underline{c>1}$



NULCLINAS: $N=1$

$N=\frac{1-P}{c}$

JUSTIFICACIÓN:

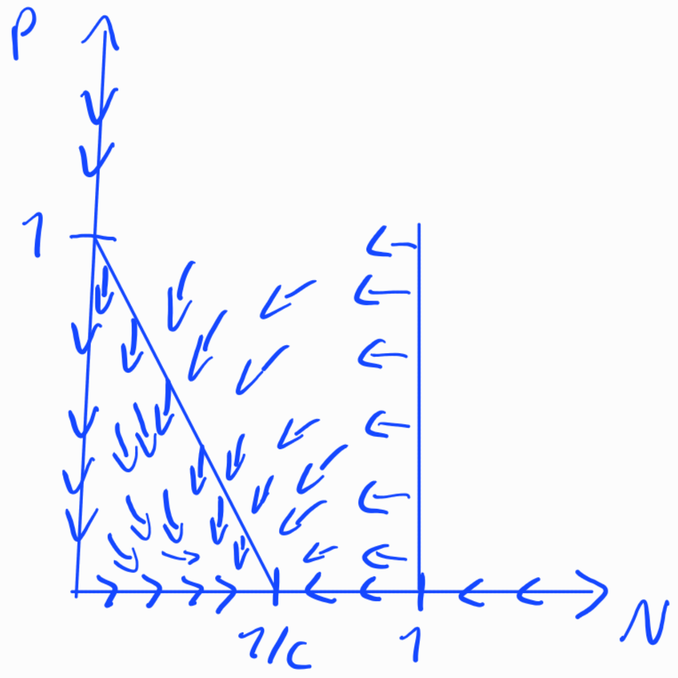
1) $N=1 \to (0,\ N(1-c-P))$ $\quad (1-c-P<0 \quad \forall P>0)$

2) $N=\frac{1-P}{c} \to \left(P\left(\frac{1-P-c}{c}\right),0\right) \rightsquigarrow \left(\frac{dP}{dt},\ \frac{dN}{dt}\right)$

3) $N=0 \to (-P,0)$

4) $P=0 \to (0,\ N(1-cN))$

COMPLETANDO



b) ASUMIENDO $c<1$.

APARTE DEL EQUILIBRIO TRIVIAL $(0,0)$ HAY OTROS 2, $(0,\frac{1}{c})$ Y $(1-c,1)$.

EL EQUILIBRIO INTERIOR HACE REFERENCIA A $(1-c,1)$. $(N\neq 0,\ P\neq 0)$

CALCULEMOS EL JACOBIANO:

$$J(P,N)=\begin{pmatrix} \frac{dP'}{dP} & \frac{dP'}{dN} \\ \frac{dN'}{dP} & \frac{dN'}{dN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N-1 & P \\ -N & 1-2cN-P \end{pmatrix}$$

EVALUAMOS

1) $$J(0,\tfrac{1}{c})=\begin{pmatrix} \frac{1-c}{c} & 0 \\ -1/c & -1 \end{pmatrix}$$

V.P.:

$$\begin{vmatrix} \frac{1-c-\lambda}{c} & 0 \\ -1/c & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1+\lambda)\left(\frac{1-c}{c}-\lambda\right)=0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 < 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{c} - 1 > 0$

PUNTO SILLA (INESTABLE)

2) $J(1-c, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1-c \\ -1 & -c \end{pmatrix}$

V. P.:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1-c \\ -1 & -c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(c+\lambda) + 1-c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + c\lambda + (1-c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(1-c)}}{2}$$

PARA $c<1$, $\Delta = c^2 - 4(1-c)$ PUEDE SER POS O NEG.

- SI $\Delta > 0$, LOS V.P. SON REALES DE DISTINTO SIGNO, PUNTO SILLA (INESTABLE)

- SI $\Delta < 0$ LOS V.P. SON COMPLEJOS CONJUGADOS CON PARTE REAL NEGATIVA (ESPIRAL ESTABLE)

(IGNORAMOS $\Delta = 0$, PUES NO QUEREMOS V.P. IGUALES)

c) SI EL PUNTO INTERIOR ES UN ESPIRAL ESTABLE LAS SOLUCIONES CERCANAS CONVERGERÁN AL PUNTO DE MANERA OSCILANTE. SE PUEDE INTERPRETAR COMO UN EQUILIBRIO ENTRE DEPREDADOR Y PRESA, ES DECIR, PUEDEN COEXISTIR.