Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 11

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Considere el sistema lineal:

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

con $t > 0$, $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)$ una matriz de coeficientes variables periódica de periodo $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$, $\forall t > 0$. Sea Φ la matriz fundamental del sistema anterior, tal que $\Phi(0) = I$.

a) Demuestre que si $\Phi(T) = I$, entonces Φ es también periódica de periodo $T > 0$.
Pauta: Con el fin de demostrar que $\Phi(t) = \Phi(t+T)$, definimos la función $\Psi(t) = \Phi(t+T)$. Veamos que Ψ también es solución:

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+T)$$

Como Φ es solución:

$$\Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T)$$

Usando que A tiene período T:

$$A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t)$$

Luego $\Psi(t) = A(t)\Psi(t)$ y por lo tanto Ψ es solución. Notamos que además cumple las mismas condiciones iniciales que Φ:

$$\Psi(0) = \Phi(T) = I = \Phi(0)$$

Luego por TEU $\Psi(t) = \Phi(t)$, es decir, $\Phi(t+T) = \Phi(t)$, $\forall t > 0$ y se concluye que Φ tiene periodo T.

b) Demuestre que de forma más general, $\forall t > 0$ se tiene que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$.
Pauta: De manera similar ahora definimos $\Psi(t) = \Phi(t+T) - \Phi(t)\Phi(T)$, queremos concluir que $\Psi(t) = 0$. Veamos primero que es solución:

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+T) - \Phi'(t)\Phi(T) = A(t+T)\Phi(t) - A(t)\Phi(t)\Phi(T) = A(t)\Phi(t) - A(t)\Phi(t)\Phi(T)$$

$$= A(t)(\Phi(t) - \Phi(t)\Phi(T)) = A(t)\Psi(t)$$

Por lo que Ψ es solución. Ahora notamos que

$$\Psi(0) = \Phi(T) - \Phi(0)\Phi(T) = \Phi(T) - \Phi(T) = 0$$

Luego por TEU $\Psi(t) = 0$, $\forall t > 0$ y concluimos que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$.

c) Demuestre que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de $\Phi(T)$ tal que es raíz k-ésima de la unidad, entonces existen soluciones periódicas del sistema original con periodo kT.
Pauta: Sea v un vector propio asociado a λ, es decir, que $\Phi(T)v = \lambda v$, definimos $Y(t) = \Phi(t)v$ como solución de nuestro sistema original:

$$Y'(t) = \Phi'(t)v = A(t)\Phi(t)v = A(t)Y(t)$$

Que cumple con el valor inicial $Y(0) = v$.
Veamos que $Y(t + kT) = Y(t)$.
Notamos que

$$Y(t + kT) = \Phi(t + kT)v = \Phi(t + (k-1)T)\Phi(T)v$$

Esto último por la parte *b*). Notemos que si iteramos esto k veces tenemos

$$\Phi(t + kT)v = \Phi(t + (k-1)T)\Phi(T)v = \Phi(t + (k-2)T)\Phi^2(T)v = \cdots = \Phi(t)\Phi^k(T)v$$

Usando que λ es valor propio tenemos

$$\Phi(t)\Phi^k(T)v = \Phi(t)\Phi^{k-1}(T)(\Phi(T)v) = \Phi(t)\Phi^{k-1}(T)(\lambda v)$$

Nuevamente, iterando esto k veces tenemos

$$= \Phi(t)\Phi^{k-2}(T)(\Phi(T)v)(\lambda) = \Phi(t)\Phi^{k-2}(T)(\lambda^2 v) = \cdots = \Phi(t)\lambda^k v$$

y como λ era k-ésima raíz de la unida $\lambda^k = 1$, con lo que nos queda

$$Y(t + kT) = \Phi(t)\lambda^k v = \Phi(t)v = Y(t).$$

P2. Resuelva el sistema

$$W' = AW + b(t)$$

usando la matriz exponencial.
Pauta: Multiplicando a ambos lados por e^{-At}:

$$W'e^{-At} = AWe^{-At} + b(t)e^{-At}$$

$$\iff W'e^{-At} - AWe^{-At} = e^{-At}b(t) \iff \frac{d}{dt}(We^{-At}) = e^{-At}b(t)$$

Recuerde que por como definimos la matriz exponencial esta siempre cumple que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, por lo que derivar e integrar está permitido. Luego integrando a ambos lados tenemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(W(s)e^{-As})ds = \int_0^t e^{-As}b(s)ds$$

$$\iff W(t)e^{-At} - W(0) = \int_0^t e^{-As}b(s)ds$$

Luego multiplicando por e^{At} la solución final queda

$$W(t) = W(0)e^{At} + e^{At}\int_0^t e^{-As}b(s)ds = W(0)e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Note que esto es la suma de la solución homogénea con una particular donde $W_h(t) = W(0)e^{At}$ es la solución homogénea y $W_p(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$ es la solución particular (variación de parámetros).

P3. Determine la solución general del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

Pauta: Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ queremos calcular la solución general de $X' = AX$. Para esto debemos ver primero si A es diagonalizable. Esto se puede ver calculando los vectores propios. Partamos calculando los valores propios de A.
Calculamos $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = -2 \text{ (doble)}, \quad \lambda_2 = 1 \text{ (simple)}$$

Ahora obtenemos los vectores propios asociados.

Para $\lambda = -2$

Resolvemos $(A + 2I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como obtuvimos un solo vector propio l.i. asociado, decimos que su multiplicidad geométrica es 1. Pero como su multiplicidad algebraica es 2, necesitamos sacar un segundo vector propio l.i. (siempre queremos tantos vectores como multiplicidad algebraica), llamado el vector propio generalizado el cual obtenemos de la siguiente forma. (También cada vez que sucede que las multiplicidades de un valor propio no coincidan, la matriz no será diagonalizable)
Vector propio generalizado $(A + 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

Resolvemos $(A - I)\mathbf{v}_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que este cumple que tiene multiplicidad algebraica y geométrica igual a 1, por lo que no se hace nada más.

Ahora, como descubrimos que nuestra matriz no es diagonalizable sabemos que la solución será de la forma $X(t) = W(t)\vec{b}$, con $b \in \mathbb{R}^n$, donde W es la matriz fundamental de la forma

$$W(t) = (e^{tA}\mathbf{v}_1 | e^{tA}\mathbf{v}_2 | e^{tA}\mathbf{v}_3)$$

Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores propios "normales", se tiene que

$$e^{At}\mathbf{v}_1 = e^{\lambda_1}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At}\mathbf{v}_3 = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

El que queda por calcular es $e^{At}\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{v}_2$ es un vector propio generalizado usamos la fórmula (en el resumen)

$$e^{At}\mathbf{v}_2 = e^{-2t} \cdot \sum_{m=0}^{2-1} \frac{t^m}{m!}(A+2I)^m \mathbf{v}_2 = e^{-2t}(I\mathbf{v}_2 + t(A+2I)\mathbf{v}_2) = e^{-2t}(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1)$$

$$= e^{-2t}\begin{pmatrix} -1+t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

Luego $W(t)$ queda

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & e^{-2t}(t-1) \\ 0 & 0 & e^{-2t} \\ -e^{-2t} & e^{t} & -te^{-2t} \end{pmatrix}$$

y la solución es $X(t) = W(t)b$, o escrito de otra forma:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-2t}(t-1) \\ e^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}$$

para $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

P4. Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

a) Encuentre la solución del sistema homogéneo asociado.

Pauta: Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, nos piden resolver $X' = AX$.

Primero, calculamos los valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda+1)$$

Calculamos los vectores propios de $\lambda = -2$

$$(A+2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies -x_1 = x_3 \implies v \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda = -1$, tenemos

$$(A+I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies x_1 = 0 \wedge -x_1 = x_2 + x_2 \implies x_1 = 0 \wedge x_2 = -x_3$$

$$\implies v \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Notamos que A es diagonalizable, pues la multiplicidad algebraica y geométrica de ambos valores propios coincide. Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$X_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Que puede escribirse matricialmente como:

$$X_h(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

b) Encuentre una solución particular del sistema.
Pauta: La idea es usar la fórmula de variación de parámetros:

$$X_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) B(s) ds$$

Donde $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$. Como en la parte anterior ya calculamos $\Phi(t)$, nos falta calcular su inversa, la cual en este caso sería

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{t} & 0 & -e^{t} \end{pmatrix}$$

Calculemos lo que está dentro de la integral

$$\Phi^{-1}(t)B(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{t} & 0 & -e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + e^{-t} + e^{-2t} \\ -e^{-t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Luego la integral queda

$$\int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + e^{-s} + e^{-2s} \\ -e^{-s} - e^{-3s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ t - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} + 1 + \frac{1}{2} \\ e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{3} - 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Luego la solución queda

$$X_p(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{3}{2} \\ e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{3} - \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Con lo que obtenemos:

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} \\ -te^{-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) Verifique que la solución general tiende al vector nulo cuando t tiende a infinito.
Pauta: La solución general es $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$. Todos los términos contienen exponenciales negativas (e^{-kt} con $k > 0$) o términos como te^{-2t} que también tienden a cero cuando $t \to \infty$. Por lo tanto:

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$