

Auxiliar 11: Matriz Exponencial
Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Considere el sistema lineal:

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

con $t > 0$, $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)$ una matriz de coeficientes variables periódica de periodo $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$, $\forall t > 0$. Sea Φ la matriz fundamental del sistema anterior, tal que $\Phi(0) = I$.

- a) Demuestre que si $\Phi(T) = I$, entonces Φ es también periódica de periodo $T > 0$.
- b) Demuestre que de forma más general, $\forall t > 0$ se tiene que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$.
- c) Demuestre que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de $\Phi(T)$ tal que es raíz k -ésima de la unidad, entonces existen soluciones periódicas del sistema original con periodo kT .

P2. Resuelva el sistema

$$W' = AW + b(t)$$

usando la matriz exponencial.

P3. Determine la solución general del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

P4. Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

- a) Encuentre la solución del sistema homogéneo asociado.
- b) Encuentre una solución particular del sistema.
- c) Verifique que la solución general tiende al vector nulo cuando t tiende a infinito.

Resumen

■ La matriz exponencial

Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes constantes:

$$x' = Ax, \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Definimos la Matriz exponencial e^{tA} , como la solución fundamental $W : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de:

$$\frac{dW}{dt} = AW$$

$$W(0) = I, \text{ matriz identidad.}$$

■ La matriz exponencial satisface las siguientes propiedades:

1. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$
2. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
3. A y e^{tA} conmutan.
4. A, B conmutan si y sólo si e^{tA}, B conmutan.
5. A, B conmutan si y sólo si $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$
6. $e^{tA^T} = (e^{tA})^T$. *Propiedad de la traspuesta.*
7. Si D es una matriz diagonal, entonces se tiene que:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Dado un vector propio generalizado v y su valor propio asociado λ . Sea n la multiplicidad algebraica de λ , se tiene que

$$e^{tA}v = e^{t\lambda} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} (A - \lambda I)^m v$$

En particular si v es un vector propio obtenido de forma normal (no generalizado), se tiene que

$$e^{At}v = e^{\lambda t}v$$

■ Una solución particular del sistema

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

viene dada por la siguiente fórmula (variación de parámetros)

$$X_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds$$

Donde Φ es la matriz fundamental canónica.