Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 9

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Considere las funciones

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t - \pi & \text{si } t < \pi \\ \pi & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \pi \\ e^{\pi - t}\operatorname{sen}(t) & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

a) Exprese φ y ψ usando funciones de Heaviside.
Pauta: Note que para cambiar el orden de las desigualdades en la función de Heaviside H_a basta tomar $(1 - H_a)$:

$$1 - H_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq a \\ 1 & \text{si } x < a \end{cases}$$

Luego podemos escribir φ como

$$\varphi(t) = (1 - H_\pi(t))(2t - \pi) + \pi \cdot H_\pi(t)$$

Ahora para ψ tenemos que simplemente será

$$\psi(t) = H_\pi(t)e^{\pi - t}\sin(t)$$

b) Encuentre una expresión para la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\varphi * \psi](s)$ de la convolución de ambas funciones.
Pauta: Sabemos que $\mathcal{L}[\varphi * \psi] = \mathcal{L}[\varphi] \cdot \mathcal{L}[\psi]$, así que calculemos las dos transformadas por separado

$$\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{L}[(1 - H_\pi(t))(2t - \pi) + \pi \cdot H_\pi(t)] = \mathcal{L}[2t - \pi - H_\pi(t)(2t - 2\pi)]$$

$$= 2\mathcal{L}[t] - \pi\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[2(t - \pi)H(t - \pi)] \quad (\text{recuerde que } H_\pi(t) = H(t - \pi))$$

Usando la transformada de la traslación tenemos

$$2\mathcal{L}[t] - \pi\mathcal{L}[1] - 2\mathcal{L}[t]e^{-s\pi}$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{\pi}{s} - \frac{2}{s^2}e^{-s\pi}$$

Calculando ahora para ψ :

$$\mathcal{L}[\psi] = \mathcal{L}[H_\pi(t)e^{\pi - t}\sin(t)] = e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-t}\sin(t + \pi)]$$

donde solamente utilizamos la transformada de la traslación.
Ahora notamos que gracias a la exponencial e^{-t} tenemos una traslación de la transformada y nos va a quedar lo siguiente

$$e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-t}\sin(t+\pi)](s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}[\sin(t+\pi)](s+1) = e^{-\pi s}\mathcal{L}[-\sin(t)](s+1)$$

Por último usando la transformada del seno nos queda

$$\mathcal{L}[\psi] = -e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Por lo tanto el producto de las dos es

$$\mathcal{L}[\varphi * \psi] = \mathcal{L}[\varphi]\cdot\mathcal{L}[\psi] = \left(\frac{2}{s^2} - \frac{\pi}{s} - \frac{2}{s^2}e^{-s\pi}\right)\cdot\left(-e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

Con lo que la transformada queda calculada.

c) Usando antitransformada de Laplace, calcule la convolución $\varphi * \psi$.
Pauta: Desarrollando el producto de la parte anterior tenemos

$$\left(\frac{2}{s^2} - \frac{\pi}{s} - \frac{2}{s^2}e^{-s\pi}\right)\cdot\left(-e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) = -\frac{2e^{-s\pi}}{s^2(s^2+2s+2)} + \frac{\pi e^{-s\pi}}{s(s^2+2s+2)} + \frac{2e^{-2s\pi}}{s^2(s^2+2s+2)}$$

Usemos fracciones parciales. Vamos a ignorar de momento los términos e^{-sk}, pues simplemente van a representar una traslación a nuestras transformadas.

$$\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

De aquí tenemos

$$2 = As^3 + 2As^2 + 2As + Bs^2 + 2Bs + 2B + Cs^3 + Ds^2$$

De donde se desprende $B = 1,\ A + C = 0,\ 2A + B + D = 0,\ 2A + 2B = 0.$
Luego $A = -1,\ D = 1$ y $C = 1$ y nos queda

$$\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{(s^2+1)+1} - \frac{1}{s}$$

$$= \mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[\cos(t)](s+1) - \mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) - \mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[t + e^{-t}\cos(t) - 1]$$

Ahora hacemos lo mismo con $\frac{\pi}{s(s^2+2s+2)}$, donde para simplificar los cálculos factorizaré afuera $\pi/2$:

$$\frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

De aquí se tiene

$$2 = As^2 + 2As + 2A + Bs^2 + Cs$$

con lo que obtenemos $A = 1,\ B + A = 0,\ 2A + C = 0 \Longrightarrow B = -1,\ C = -2$. Así la fracción queda

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \frac{s+1}{(s^2+1)+1} - \frac{1}{(s^2+1)+1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(t)](s+1) - \mathcal{L}[\sin(t)](s+1)\right) = \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\sin(t)](s)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1 - e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))]$$

Juntando todo la expresión total queda

$$-e^{-s\pi}\mathcal{L}[t + e^{-t}\cos(t) - 1] + e^{-s\pi}\frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1 - e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))] + e^{-2s\pi}\mathcal{L}[t + e^{-t}\cos(t) - 1]$$

$$= -\mathcal{L}[((t-\pi) + e^{\pi-t}\cos(t-\pi) - 1)H_\pi(t)] + \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[(1 - e^{\pi-t}(\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)))H_\pi(t)]$$
$$+\mathcal{L}[(t - 2\pi + e^{2\pi-t}\cos(t-2\pi) - 1)H_{2\pi}(t)]$$

Así, aplicando la antitransformada y desarrollando los senos y cosenos, la convolución sería:

$$\varphi*\psi(t) = -(t-\pi-e^{\pi-t}\cos(t)-1)H_\pi(t)+\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi-t}(\cos(t)+\sin(t)))H_\pi(t)+(t-2\pi+e^{2\pi-t}\cos(t)-1)H_{2\pi}(t)$$

P2. Considere la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \delta(t-a) \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes y $\delta(t-a)$ es la distribución delta de Dirac centrada en $t = a$. Demuestre que la derivada de orden $n-1$ presenta un salto de magnitud 1 en $t = a$, es decir:

$$\lim_{h\to 0^+}\left[y^{(n-1)}(a+h) - y^{(n-1)}(a-h)\right] = 1$$

Pauta: Integramos la ecuación (1) en el intervalo $[a-h, a+h]$, para $h > 0$:

$$\int_{a-h}^{a+h} y^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{a-h}^{a+h} y^{(k)}(t)dt = \int_{a-h}^{a+h}\delta(t-a)dt$$

Sabiendo que $H_a' = \delta_a$ notemos que esto queda como

$$y^{(n-1)}(a+h) - y^{(n-1)}(a-h) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(y^{(k-1)}(a+h) - y^{(k-1)}(a-h)) = H_a(a+h) - H_a(a-h) = 1 \tag{2}$$

Donde la resta $H_a(a+h) - H_a(a-h)$ nos da 1, porque $a+h \geq a$ y $a-h < a$, es decir, $H_a(a+h) = 1$ y $H_a(a-h) = 0$.
Ahora notemos que para los términos de orden inferior ($k = 0, \ldots, n-2$), este límite se anula:

$$\lim_{h\to 0^+}\left[y^{(k)}(a+h) - y^{(k)}(a-h)\right] = 0$$

Esto porque $y^{(k)}$ es continua en a para $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, ya que de lo contrario podría escribirse como $y^{(k)} = (1 - H_a)f_1 + H_a f_2$ con $f_1 \neq f_2$ (como estamos asumiendo que y es derivable, no hay casos patológicos como la indicatriz de los racionales). Luego su derivada sería

$$y^{(k+1)} = f_1' - \delta_a f_1 - H_a f_1' + \delta_a f_2 + H_a f_2'$$

como al lado derecho de (1) tenemos solo δ_a notamos que es imposible que el lado izquierdo tenga derivadas de δ_a, en particular notamos que lo anterior implica que $y^{(n)}$ contiene términos del estilo $\delta_a^{(n-k-1)}$, donde $0 \leq k \leq n-2 \implies n-k-1 \geq 1$. Nótese que como $f_1 \neq f_2$ estas derivadas de δ_a no se pueden cancelar todas y por lo tanto llegamos a contradecir que nuestro lado derecho es tan solo δ_a.

Luego como $y^{(k)}$ es continuo en a para $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, tenemos que tomando límite cuando $h \to 0^+$ la expresión queda:

$$\lim_{h\to 0^+} \left[y^{(n-1)}(a+h) - y^{(n-1)}(a-h) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (y^{(k-1)}(a+h) - y^{(k-1)}(a-h)) \right] = 1$$

como se cancelan los términos en la sumatoria obtenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \left[y^{(n-1)}(a+h) - y^{(n-1)}(a-h) \right] = 1$$

P3. Considere la ecuación $y'' - 2y' + 10y = f$ con condición inicial $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) Considere $f = c\delta_T$. ¿Es posible encontrar c y $T > 0$ tal que la solución de la ecuación anterior satisfaga $y(t) = 0$ para todo $t > T$? Si su respuesta es positiva, determine todos los posibles valores de T y correspondientes c.
Pauta: Consideramos la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + 10y = c\delta_T,$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados:

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + 10\mathcal{L}[y] = c\mathcal{L}[\delta_T].$$

Usando las propiedades de la transformada de las derivadas:

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 2(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 10\mathcal{L}[y] = ce^{-sT}.$$

Sustituimos las condiciones iniciales:

$$s^2\mathcal{L}[y] - 1 - 2s\mathcal{L}[y] + 10\mathcal{L}[y] = ce^{-sT}.$$

Factorizando $\mathcal{L}[y]$:

$$(s^2 - 2s + 10)\mathcal{L}[y] = 1 + ce^{-sT}.$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$ tenemos:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1 + ce^{-sT}}{s^2 - 2s + 10}.$$

Ahora notemos que tenemos la siguiente factorización para el denominador, la cual nos lo deja perfecto para escribirlo como la transformada del seno

$$s^2 - 2s + 10 = (s-1)^2 + 9.$$

y como se tiene que

$$\frac{1}{(s-1)^2 + 9} = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\sin(3t)](s-1) = \frac{e^t}{3}\mathcal{L}[\sin(3t)](s)$$

y también se tiene que

$$\frac{ce^{-sT}}{(s-1)^2 + 9} = \frac{c}{3}\mathcal{L}[e^{-sT}\sin(3t)](s-1) = \frac{c}{3}\mathcal{L}[e^{-sT}e^t\sin(3t)](s) = \frac{c}{3}\mathcal{L}[H_T(t)e^{t-T}\sin(3(t-T))]$$

Podemos concluir usando la antitransformada que la solución $y(t)$ es:

$$y(t) = \frac{1}{3}e^t \sin(3t) + \frac{c}{3}e^{t-T} H_T(t) \sin(3(t-T)),$$

Para que $y(t) = 0$ para todo $t > T$, se debe cumplir:

$$\frac{1}{3}e^t \sin(3t) + \frac{c}{3}e^{t-T} \sin(3(t-T)) = 0 \quad \forall t > T.$$

Dividiendo por $\frac{1}{3}e^t$:

$$\sin(3t) + ce^{-T} \sin(3(t-T)) = 0 \iff \sin(3t) = -ce^{-T} \sin(3t - 3T)$$

Notamos que para que esto sea válido para todo $t > T$, los argumentos deben satisfacer:

$$3T = 2n\pi \iff T = \frac{2n\pi}{3} \quad \text{y} \quad -ce^{-T} = 1 \iff c = -e^T,$$

donde n es un número natural (si dejamos que sea entero, entonces ya no se cumple que $T > 0$). De esta manera los senos tienen igual coeficiente que los multiplique y sus argumentos van a coincidir, pues $\sin(3t + 2n\pi) = \sin(3t)$.
Luego es posible encontrar dichos valores, los cuales serían

$$T = \frac{2n\pi}{3}, \quad c = -e^{\frac{2n\pi}{3}}.$$

b) Considere ahora f una función continua por pedazos y de orden exponencial. Exprese la solución de esta ecuación expresándola como $y = y_h + \int_0^t g(t-s)f(s)\,ds$. Determine y_h solución de la ecuación homogénea y g la función respuesta al impulso.
Pauta: Aplicamos la transformada a la EDO (como f es continua por partes y de orden exponencial no hay problema)

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + 10\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f].$$

Usando las propiedades de la transformada:

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 2(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 10\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f].$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$:

$$s^2\mathcal{L}[y] - 1 - 2s\mathcal{L}[y] + 10\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f].$$

Factorizando $\mathcal{L}[y]$:

$$(s^2 - 2s + 10)\mathcal{L}[y] = 1 + \mathcal{L}[f].$$

Despejando $\mathcal{L}[y]$:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 - 2s + 10} + \frac{\mathcal{L}[f]}{s^2 - 2s + 10}.$$

Notamos que

$$\frac{1}{s^2 - 2s + 10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s-1)^2 + 9} = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\sin(3t)](s-1) = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}[e^t \sin(3t)](s)$$

Reemplazando esto tenemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{3}\mathcal{L}[e^t \sin(3t)] + \mathcal{L}[f]\mathcal{L}\left[\frac{e^t \sin(3t)}{3}\right]$$

Definiendo $h(t) = \frac{e^t \sin(3t)}{3}$ y pasando el producto a una convolución nos queda:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^t \sin(3t)}{3} + (f * h)(t)\right]$$

Luego la solución queda

$$y(t) = \frac{e^t \sin(3t)}{3} + (f * h)(t)$$

Ahora resolvamos la EDO homogénea

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

El polinomio característico es:

$$r^2 - 2r + 10 = 0 \implies r = 1 \pm 3i.$$

Entonces la solución homogénea es:

$$y_h(t) = e^t(A\cos(3t) + B\sin(3t)).$$

Ahora con el fin de despejar g escribamos la solución $y(t)$ como nos pide el enunciado:

$$y(t) = e^t(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + \int_0^t g(t-s)f(s)ds = e^t(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + (g * f)(t)$$

Ahora notamos que para tener

$$y(t) = \frac{e^t \sin(3t)}{3} + (f * h)(t) = e^t(A\cos(3t) + B\sin(3t)) + (g * f)(t)$$

Necesita cumplirse $A = 0,\ B = 1/3,\ g = h$ (recuerde que la convolución es conmutativa). Luego tenemos que la función g respuesta del impulso viene dada por

$$g(t) = \frac{e^t \sin(3t)}{3}$$

c) ¿Qué ecuación lineal homogénea satisface g?
Pauta: Como g resultó ser un caso particular de la solución homogénea, va a satisfacer la mismo EDO homogénea, es decir

$$g'' - 2g' + 10g = 0$$

P4. Considere un sistema formado por dos masas m_1 y m_2, dispuestas horizontalmente sin fricción. La masa m_1 está unida a una pared mediante un resorte de constante k_1, y la masa m_2 está unida a otra pared mediante un resorte de constante k_3. Ambas masas están unidas entre sí mediante un resorte de constante k_2. El sistema se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. En el instante $t = 0$, una fuerza impulsiva $\delta(t)$ actúa sobre la masa m_1.
Asumiendo $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$, y sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 desde su posición de equilibrio. El sistema de ecuaciones diferenciales que modela la evolución del sistema es:

$$\begin{cases} x_1''(t) + 3x_1(t) - 2x_2(t) = \delta(t) \\ x_2''(t) + 3x_2(t) - 2x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad x_1'(0) = x_2'(0) = 0$$

Resuelva el sistema.
Pauta:

Notamos que la transformada de x_i'' es

$$\mathcal{L}[x_i''] = s^2\mathcal{L}[x_i] - sx_i(0) - x_i'(0) = s^2\mathcal{L}[x_i]$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación:

$$\begin{cases} s^2\mathcal{L}[x_1] + 3\mathcal{L}[x_1] - 2\mathcal{L}[x_2] = 1 & \text{(recuerde que } \mathcal{L}[\delta] = 1) \\ s^2\mathcal{L}[x_2] + 3\mathcal{L}[x_2] - 2\mathcal{L}[x_1] = 0 \end{cases}$$

Reescribimos el sistema:

$$\begin{cases} (s^2+3)\mathcal{L}[x_1] - 2\mathcal{L}[x_2] = 1 \\ -2\mathcal{L}[x_1] + (s^2+3)\mathcal{L}[x_2] = 0 \end{cases}$$

Despejando $\mathcal{L}[x_2]$ en la segunda ecuación:

$$\mathcal{L}[x_2] = \frac{2}{s^2+3}\mathcal{L}[x_1]$$

Sustituimos en la primera:

$$(s^2+3)\mathcal{L}[x_1] - 2\cdot\frac{2}{s^2+3}\mathcal{L}[x_1] = 1$$

$$\left((s^2+3) - \frac{4}{s^2+3}\right)\mathcal{L}[x_1] = 1 \Rightarrow \mathcal{L}[x_1] = \frac{1}{(s^2+3) - \frac{4}{s^2+3}} = \frac{1}{\frac{(s^2+3)^2-4}{s^2+3}}$$

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{s^2+3}{(s^2+3)^2-4}$$

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{s^2+3}{s^4+6s^2+9-4} = \frac{s^2+3}{s^4+6s^2+5}$$

Y entonces:

$$\mathcal{L}[x_2] = \frac{2}{s^2+3}\mathcal{L}[x_1] = \frac{2}{s^2+3}\cdot\frac{s^2+3}{s^4+6s^2+5} = \frac{2}{s^4+6s^2+5}$$

Ahora debemos encontrar las transformadas inversas de:

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{s^2+3}{s^4+6s^2+5}, \qquad \mathcal{L}[x_2] = \frac{2}{s^4+6s^2+5}$$

Notamos que podemos factorizamos el denominador:

$$s^4+6s^2+5 = (s^2+1)(s^2+5)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{s^2+3}{(s^2+1)(s^2+5)}, \qquad \mathcal{L}[x_2] = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+5)}$$

Usamos fracciones parciales para $\mathcal{L}[x_1]$:

$$\frac{s^2+3}{(s^2+1)(s^2+5)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+5}$$

Esto nos deja

$$s^2+3 = A(s^2+5) + B(s^2+1)$$

$$s^2+3 = As^2 + 5A + Bs^2 + B = (A+B)s^2 + (5A+B)$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 5A+B=3 \end{cases} \Rightarrow A = 1/2, \quad B = 1/2$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+5}\right)$$

Como sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\sin(at)$$

Luego tenemos que

$$\mathcal{L}[x_1] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[\sin(t)] + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}[\sin(\sqrt{5}t)]\right)$$

Ahora para

$$\mathcal{L}[x_2] = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+5)}$$

Tenemos que

$$\frac{2}{(s^2+1)(s^2+5)} = \frac{C}{s^2+1} + \frac{D}{s^2+5}$$

Esto nos deja

$$2 = C(s^2+5) + D(s^2+1)$$
$$2 = Cs^2 + 5C + Ds^2 + D$$

$$\begin{cases} 5C+D=2 \\ D+C=0 \end{cases} \Rightarrow C = 1/2, \quad D = -1/2$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[x_2] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+5}\right)$$

Lo que al igual que antes podemos escribir como

$$\mathcal{L}[x_2] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[\sin(t)] - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}[\sin(\sqrt{5}t)]\right)$$

Entonces la solución final del sistema es:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)\right)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left(\sin(t) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)\right)$$