Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 9: Convolución y delta de Dirac

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Considere las funciones

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t - \pi & \text{si } t < \pi \\ \pi & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \pi \\ e^{\pi - t} \operatorname{sen}(t) & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

a) Exprese φ y ψ usando funciones de Heaviside.

b) Encuentre una expresión para la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\varphi * \psi](s)$ de la convolución de ambas funciones.

c) Usando antitransformada de Laplace, calcule la convolución $\varphi * \psi$.

P2. Considere la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n con coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \delta(t - a) \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes y $\delta(t-a)$ es la distribución delta de Dirac centrada en $t = a$. Demuestre que la derivada de orden $n-1$ presenta un salto de magnitud 1 en $t = a$, es decir:

$$\lim_{h \to 0^+} \left[y^{(n-1)}(a+h) - y^{(n-1)}(a-h) \right] = 1$$

P3. Considere la ecuación $y'' - 2y' + 10y = f$ con condición inicial $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) Considere $f = c\delta_T$. ¿Es posible encontrar c y $T > 0$ tal que la solución de la ecuación anterior satisfaga $y(t) = 0$ para todo $t > T$? Si su respuesta es positiva, determine todos los posibles valores de T y correspondientes c.

b) Considere ahora f una función continua por pedazos y de orden exponencial. Exprese la solución de esta ecuación expresándola como $y = y_h + \int_0^t g(t-s) f(s)\, ds$. Determine y_h solución de la ecuación homogénea y g la función respuesta al impulso.

c) ¿Qué ecuación lineal homogénea satisface g?

P4. Considere un sistema formado por dos masas m_1 y m_2, dispuestas horizontalmente sin fricción. La masa m_1 está unida a una pared mediante un resorte de constante k_1, y la masa m_2 está unida a otra pared mediante un resorte de constante k_3. Ambas masas están unidas entre sí mediante un resorte de constante k_2. El sistema se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. En el instante $t = 0$, una fuerza impulsiva $\delta(t)$ actúa sobre la masa m_1.

Asumiendo $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$, y sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 desde su posición de equilibrio. El sistema de ecuaciones diferenciales que modela la evolución del sistema es:

$$\begin{cases} x_1''(t) + 3x_1(t) - 2x_2(t) = \delta(t) \\ x_2''(t) + 3x_2(t) - 2x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad x_1'(0) = x_2'(0) = 0$$

Resuelva el sistema.

Resumen

- **Función de Heaviside**
  Se define $H_a(x)$, la función escalón de Heaviside, como la función dada por:
  $$H_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$
- **Transformada de una traslación**
  Sea $H_a(x) = H(x-a)$ la función Heaviside, entonces se cumple que:
  $$\mathcal{L}[f(x-a)H(x-a)](s) = e^{-sa}\,\mathcal{L}[f](s)$$
- Se define simbólicamente la **delta de Dirac** $\delta(x)$, como:
  $$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
  La cual cumple $\mathcal{L}[\delta](s) = 1$.
  Asimismo definimos $\delta_a(x) = \delta(x-a)$, la cual cumple $\mathcal{L}[\delta_a](s) = e^{-as}$
- **Derivada de Heaviside**
  Decimos que la *derivada generalizada* de la función $H_a(x)$ es $\delta_a(x)$, esto lo solemos denotar como $H_a' = \delta_a$.
- **Traslación de una Transformada**
  $$\mathcal{L}\big[f(x)\big](s-a) = \mathcal{L}\left[e^{ax}f(x)\right]$$
- Se define la **convolución** entre f y g como:
  $$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$
- **Transformada de la Convolución**
  $$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$$
- **Transformadas útiles**

- $\mathcal{L}[\cos(kx)](s) = \frac{s}{s^2+k^2}$
- $\mathcal{L}[\sin(kx)](s) = \frac{k}{s^2+k^2}$
- $\mathcal{L}[e^{ax}](s) = \frac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$