Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 7

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Usando el método de coeficientes indeterminados, dé la forma de la solución homogénea y una solución particular (es decir sin evaluar las constantes) de

$$(D-2)^2(D^2+1)^2y = x^2e^{3x} \tag{1}$$

$$D^3(D^2-6D+10)^2y = x^2\cos(x)e^{3x} \tag{2}$$

Pauta: Partamos por la primera EDO:

$$(D-2)^2(D^2+1)^2y = x^2e^{3x}$$

Para sacar su solución homogénea buscamos las raíces de su polinomio característico:

$$(\lambda-2)^2(\lambda^2+1)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2 = 0$$

Este polinomio tiene las siguientes soluciones

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

Cada una con multiplicidad 2.
Luego la solución homogénea es

$$C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + C_5x\cos(x) + C_6x\sin(x)$$

Ahora para sacar la solución particular tomamos el anulador del lado derecho, el cual es $(D-3)^3$. Notamos que no hay resonancia, pues no se repiten anuladores con el lado izquierdo. Como no hay resonancia escribimos la solución particular como la resolución del polinomio asociado a su anulador, es decir,

$$(\lambda-3)^3 = 0$$

La solución es $\lambda = 3$ con multiplicidad 3, por lo que la solución particular se verá:

$$y_p(x) = A_1e^{3x} + A_2xe^{3x} + A_3x^2e^{3x} = e^{3x}(A_1 + A_2x + A_3x^2)$$

Así terminamos con la primera EDO.
Ahora hacemos lo mismo para la segunda EDO

$$D^3(D^2-6D+10)^2y = x^2\cos(x)e^{3x}$$

Para obtener la solución homogénea encontramos las raíces del polinomio característico

$$\lambda^3(\lambda^2-6\lambda+10)^2 = 0$$

Notamos que $\lambda_1 = 0$ es una solución con multiplicidad 3. Para sacar el resto de raíces usamos la fórmula cuadrática

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i$$

Luego $\lambda_2 = 3 - i$ y $\lambda_3 = 3 + i$ son raíces con multiplicidad 2 cada una.
Así la solución homogénea queda

$$y_h(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + B_1 e^{3x}\cos(x) + B_2 e^{3x}\sin(x) + B_3 x e^{3x}\cos(x) + B_4 x e^{3x}\sin(x)$$

Ahora para la solución particular nos fijamos en el anulador del lado derecho, el cual en este caso es $((D-3)^2+1)^3$, lo que da el polinomio característico

$$((\lambda-3)^2+1)^3 = (\lambda^2 - 6\lambda + 10)^3 = 0$$

Que tiene como raíces $\lambda_1 = 3 + i$ y $\lambda_2 = 3 - i$, cada una con multiplicidad 3. Notamos que como se repiten raíces con el lado izquierdo habrá resonancia. Aquí como en el lado izquierdo el factor de resonancia asociado a esas raíces es 2 (es la parte de los anuladores del lado izquierdo que nos dio las raíces $e^{3x}\cos(x)$ y $e^{3x}\sin(x)$, es decir, $(D^2 - 6D + 10)^2$ la cual notamos está elevada a 2), tenemos que multiplicar por x^2 todos los términos asociados a $e^{3x}\cos(x)$ y $e^{3x}\sin(x)$ en nuestra solución, que en este caso son todos nuestros términos. Es decir, las raíces raíces $\lambda_1 = 3 + i$ y $\lambda_2 = 3 - i$ de multiplicidad 3 nos dan la expresión

$$e^{3x}\cos(x)(A_1 + A_2 x + A_3 x^2) + e^{3x}\sin(x)(B_1 + B_2 x + B_3 x^2)$$

y la resonancia nos deja la expresión final como

$$y_p(x) = x^2(e^{3x}\cos(x)(A_1 + A_2 x + A_3 x^2) + e^{3x}\sin(x)(B_1 + B_2 x + B_3 x^2))$$

Donde, nuevamente, el x^2 multiplica todos los términos, pues cada término está asociado a $\lambda_1 = 3+i$ o $\lambda_2 = 3 - i$ (o en otras palabras $e^{3x}\cos(x)$ y $e^{3x}\sin(x)$) que es la parte que genera la resonancia.

P2. Demuestre que las siguientes funciones son de orden exponencial y calcule su transformada de Laplace

a) e^{ax}
Pauta: Es directo que e^{ax} es de orden exponencial, basta acotarla por si misma.
Calculemos su transformada:

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^{+\infty} e^{ax}e^{-sx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x}\,dx$$

Esta última integral converge para $(a-s) < 0$, es decir, para $s > a$, luego integrando nos queda:

$$\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x}\,dx = \left.\frac{e^{(a-s)x}}{a-s}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

b) x^n, $n \in \mathbb{N}$
Pauta: Para ver que x^n es de orden exponencial basta ver que $x < e^x$ en el intervalo $[0, +\infty)$ (ver demostración en P3). Luego se puede concluir que $x^n < e^{nx}$ y por lo tanto x^n es de orden exponencial. Ahora calculemos su transformada:

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^{+\infty} x^n e^{-sx}\,dx$$

Usando integración por partes queda

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-sx}\,dx = \cancel{\left.\frac{x^n e^{-sx}}{-s}\right|_0^{+\infty}} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} n x^{n-1}e^{-sx}\,dx = \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-sx}\,dx = \frac{n}{s}\mathcal{L}[x^{n-1}]$$

Luego notamos lo siguiente

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[e^{0x}] = \frac{1}{s-0} = \frac{1}{s}$$

Ahora siguiendo la fórmula recursiva que encontramos $\mathcal{L}[x^n] = \frac{n}{s}\mathcal{L}[x^{n-1}]$ tenemos:

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[x^2] = \frac{2}{s}\mathcal{L}[x] = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[x^3] = \frac{3}{s}\mathcal{L}[x^2] = \frac{3\cdot 2}{s^4}$$

Notamos que parecen seguir el patrón

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Demostremos esto por inducción (el caso base ya lo vimos):
Si $\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, entonces

$$\mathcal{L}[x^{n+1}] = \frac{n+1}{s}\mathcal{L}[x^n] = \frac{n+1}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

Queda entonces demostrado que la forma general de la transformada de x^n viene dada por

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

c) $\sin(ax)$

d) $\cos(ax)$
Pauta: Vamos a resolver la *c*) y *d*) juntas como dice la indicación.
Primero para ver que son de orden exponencial basta darse cuenta que $|\sin(ax)| \leq 1 \leq e^x$ y $|\cos(ax)| \leq 1 \leq e^x$ en el intervalo $[0, +\infty)$.
Ahora veamos sus transformadas.
La transformada de $\sin(ax)$ viene dada por

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \int_0^{+\infty} \sin(ax)e^{-sx}\,dx$$

Usando integración por partes tenemos

$$\int_0^{+\infty} \sin(ax)e^{-sx}\,dx = \cancel{\left.\frac{\sin(ax)e^{-sx}}{-s}\right|_0^{+\infty}} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} a\cos(ax)e^{-sx}dx = \frac{a}{s}\mathcal{L}[\cos(ax)]$$

Ahora haciendo lo mismo para la transformada de $\cos(ax)$ tenemos:

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \int_0^{+\infty} \cos(ax)e^{-sx}\,dx$$

Usando integración por partes

$$\int_0^{+\infty} \cos(ax)e^{-sx}\,dx = \left.\frac{\cos(ax)e^{-sx}}{-s}\right|_0^{+\infty} - \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} a\sin(ax)e^{-sx}dx = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\mathcal{L}[\sin(ax)]$$

Luego llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s}\mathcal{L}[\cos(ax)] \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\mathcal{L}[\sin(ax)] \qquad (2)$$

Reemplazando la primera en la segunda tenemos:

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\cdot\frac{a}{s}\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2}\mathcal{L}[\cos(ax)] \iff \mathcal{L}[\cos(ax)]\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\iff \mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Luego podemos calcular la transformada de $\sin(ax)$ reemplazando en la primera ecuación

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s}\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{a}{s}\cdot\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Por lo que concluimos que

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

P3. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$, es decir, la parte entera de x. Demuestre que esta es de orden exponencial y continua por pedazos. Calcule su transformada de Laplace.

Hint: Para $|r| < 1$, la sumatoria $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{1}{(1-r)^2}$

Pauta: Que es continua por pedazos se tiene directo de que para los intervalos de la forma $(n, n+1)$, $f(x) = n$. Es decir, para la sucesión dada por $a_n = n$, la restricción de f a los intervalos (a_n, a_{n+1}) será una función constante ($f|_{(n,n+1)} = n$), la cual sabemos es continua y acotada. Luego f es una función continua por pedazos. Además existen sus límites laterales:

$$\lim_{x\to a_n^+} f(x) = n+1$$

$$\lim_{x\to a_n^-} f(x) = n$$

El que es de orden exponencial se tiene de que la función exponencial siempre crece más rápido que x y x a su vez crece más rápido que su parte entera. Esto lo podemos demostrar así:
Sea $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = e^x - x$, queremos ver que g es una función estrictamente positiva, es decir, $g(x) > 0$, $\forall x \geq 0$. Primero notamos que para $x = 0$ se tiene que $g(0) = 1 > 0$, así que para $x = 0$ se tiene que la función es positiva. Si demostramos que es creciente entonces podremos concluir que $g(x) > 0$, $\forall x \geq 0$. Para ver esto la derivamos:

$$g'(x) = e^x - 1$$

Para $x > 0$ sabemos que como la exponencial es creciente, entonces $e^x > 1$, luego $g'(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Con esto concluimos que g es creciente en este intervalo y por lo tanto se tendrá que $g(x) > 0$, $\forall x \geq 0$.
Entonces tenemos

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq e^x$$

y por lo tanto f es de orden exponencial.
Ahora calculemos su transformada:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx = \int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-sx}\,dx$$

Como dijimos anteriormente en los intervalos de la forma $[n, n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$ se tendrá que $f(x) = n$. Nos podemos aprovechar de esto para calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-sx}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} ne^{-sx}dx$$

Donde todo lo que hicimos es separar la integral en intervalos de la forma $[n, n+1)$. Luego la integral dentro de la sumatoria la podemos calcular simplemente como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} ne^{-sx}dx = \sum_{n=0}^{\infty} n \left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_n^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{e^{-s(n+1)} - e^{-sn}}{-s} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{-sn} - e^{-s(n+1)})$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-sn}(1 - e^{-s}) = \frac{1 - e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-sn}$$

Como $s > 0$ se tendrá que $e^{-s} < 1$ y podemos usar la fórmula de la indicación.

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

con $r = e^{-s}$. Esto nos deja el siguiente resultado:

$$\frac{1 - e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-sn} = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)\frac{1}{(1 - e^{-s})^2} = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}$$

Luego concluimos que la transformada de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ viene dada por

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}$$

P4. Sea f continua por pedazos y de orden exponencial, demuestre que

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

Pauta: Hay que demostrar que

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx = 0$$

Esto es posible lograrlo acotando el valor absoluto de la integral por algo que tienda a 0 cuando $s \to \infty$ y concluir por el teorema del sandwich.
Entonces, acotamos la integral con la desigualdad conocida del valor absoluto:

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|f(x)e^{-sx}\right|\,dx$$

Como la exponencial siempre es positiva dejamos el valor absoluto solo en f

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|\,e^{-sx}\,dx$$

Luego podemos usar que f es de orden exponencial, es decir, existen $C > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ constantes tales que $|f(x)| \leq Ce^{\alpha x}$. Luego acotando lo que tenemos a la derecha usando esto:

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|\,e^{-sx}\,dx \leq \int_0^{+\infty} (Ce^{\alpha x})e^{-sx}\,dx = C\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)x}\,dx$$

La última integral converge cuando $(\alpha - s) < 0$, es decir, cuando $s > \alpha$. Esto no es problema, pues cuando definimos la transformada establecemos que solo nos sirven los s a partir de un α_0, en este caso $\alpha_0 = \alpha$.
Luego calculamos la integral:

$$C\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)x}\,dx = C\frac{e^{(\alpha-s)x}}{\alpha-s}\Bigg|_0^{+\infty} = 0 - \frac{C}{\alpha-s} = \frac{C}{s-\alpha}$$

Entonces concluimos que

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx\right| \leq \frac{C}{s-\alpha}$$

Luego como

$$\lim_{s\to\infty} \frac{C}{s-\alpha} = 0$$

Concluimos que

$$\lim_{s\to\infty} \left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx\right| = 0$$

Lo que implica que

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = \lim_{s\to\infty} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx = 0$$

Demostrando lo pedido.