Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 7: Coeficientes Indeterminados y Transformada de Laplace

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. Usando el método de coeficientes indeterminados, dé la forma de la solución homogénea y una solución particular (es decir sin evaluar las constantes) de

$$(D-2)^2(D^2+1)^2y = x^2e^{3x} \tag{1}$$

$$D^3(D^2-6D+10)^2y = x^2\cos(x)e^{3x} \tag{2}$$

P2. Demuestre que las siguientes funciones son de orden exponencial y calcule su transformada de Laplace

a) e^{ax}

b) x^n, $n \in \mathbb{N}$

c) $\sin(ax)$

d) $\cos(ax)$

Hint para c) y d): Desarrolle ambas transformadas y llegue a un sistema de ecuaciones.

P3. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$, es decir, la parte entera de x. Demuestre que esta es de orden exponencial y continua por pedazos. Calcule su transformada de Laplace.

Hint: Para $|r| < 1$, la sumatoria $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{1}{(1-r)^2}$

P4. Sea f continua por pedazos y de orden exponencial, demuestre que

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$$

Resumen

- **[Coeficientes indeterminados]** Es un método de resolución de EDO lineales no homogéneas a coeficientes constantes, es decir, para ecuaciones:

$$P(D)y = (D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_l)^{m_l}y = q_{k_0}e^{\lambda_0 x}$$

  a) Se verifica que el lado derecho sea combinación lineal de polinomios, exponenciales, senos y/o cosenos.

  b) Se identifica el anulador del lado derecho.

  c) Se propone una solución general de acuerdo a si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ o $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ o a los anuladores según la siguiente tabla:

Función (o combinación lineal)	**Anulador**
$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$	D^n
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{n-1}e^{\lambda x}$	$(D-\lambda)^n$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $e^{\alpha x}\sin(\beta x), \dots, x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$((D-\alpha)^2+\beta^2)^n$

  Luego se evalúa si hay o no **resonancia**.

  - **Caso no resonante:** $\forall j \in \{1,\dots,l\} : \lambda_0 \neq \lambda_j$ (es decir, no se repiten los anuladores del lado izquierdo con el derecho). Se deja la solución como la propuesta.
  - **Caso resonante:** $\exists j \in \{1,\dots,l\} : \lambda_0 = \lambda_j$. Se agrega x^m a los elementos de la base asociados al anulador repetido, donde m es su multiplicidad del lado izquierdo.

  d) Se reemplaza en la EDO para encontrar las constantes fijas.

- **[Continua por tramos]** Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, se dirá que f es continua por tramos, si existe una sucesión (finita o infinita) de $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ distintos y ordenados de manera creciente, de modo que la restricción de f a cada uno de los intervalos

$$(0,\alpha_1), (\alpha_1,\alpha_2), \dots, (\alpha_k,\alpha_{k+1}), \dots$$

  sea continua y acotada, pero además cumpla que para todo α_k existan los límites:

$$f(\alpha_k^+) = \lim_{x\to\alpha_k^+} f(x) \quad \text{y} \quad f(\alpha_k^-) = \lim_{x\to\alpha_k^-} f(x)$$

- **[Orden exponencial]** Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, se dirá que f es de orden exponencial si existen constantes $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \geq 0$ se tenga que:

$$|f(x)| \leq Ce^{\alpha x}$$

- **[Transformada de Laplace]** Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de orden exponencial y continua por tramos, definimos la transformada de Laplace de f como la función:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

  para $s > \alpha_0$, donde α_0 es el menor valor real no negativo tal que $\forall x \geq 0$ se cumple $|f(x)| \leq Ce^{\alpha_0 x}$ (es decir, la cota exponencial).