Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar Extra C2

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. *a)* Considere la EDO

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

con a y b funciones de período T.
Encuentre las condiciones para que tenga una solución de período T, asumiendo que existe una base $\{y_1, y_2\}$ tal que $y_1(0) = y_2'(0) = 1$, $y_1'(0) = y_2(0) = 0$.

Pauta: Primero notamos que si $y(t)$ es solución de la EDO, entonces $g(t) = y(t+T)$ también es solución:

$$g'' + a(t)g' + b(t)g = y''(t+T) + a(t+T)y'(t+T) + b(t+T)y(t+T) = 0$$

Donde usamos que a y b tienen período T y que si y es solución, entonces

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

para todo t (en particular para $t+T$).
Luego si usamos TEU y encontramos que y y g cumplen las mismas condiciones iniciales, entonces $y = g$ y por lo tanto y será periódica. En otras palabras hay que buscar las condiciones iniciales adecuadas para que y sea periódica.
Bueno, si y es periódica de periodo T, entonces $y(0) = y(T)$ y además $y'(0) = y'(T)$ (ya que $y(t) = g(t) \implies y' = g' = y'(t+T)$).
En otras palabras y será periódica sí y solo sí $y(0) = y(T)$ y $y'(0) = y'(T)$.
La implicancia de izquierda a derecha es directa y la implicancia de derecha a izquierda es lo que argumentamos por TEU:
Sea y solución, entonces $g(t) = y(t+T)$ siempre será solución. Luego si cumplen las mismas condiciones iniciales por TEU tienen que ser iguales, lo que implicaría que y es periódica.
Ahora veamos qué se necesita para que haya algún y solución que cumpla $y(0) = y(T)$ y $y'(0) = y'(T)$:
Usando la base que nos da el enunciado tenemos que

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.
Luego

$$y(0) = Ay_1(0) + By_2(0) = A$$

$$y'(0) = Ay_1'(0) + By_2'(0) = B$$

También como en general se tiene que la derivada de y vendrá dada por

$$y'(t) = Ay_1'(t) + By_2'(t)$$

Entonces tenemos las igualdades

$$y(T) = Ay_1(T) + By_2(T)$$

$$y'(T) = Ay_1'(T) + By_2'(T)$$

Luego reemplazando $A = y(0)$ y $B = y'(0)$:

$$y(T) = y(0)y_1(T) + y'(0)y_2(T)$$

$$y'(T) = y(0)y_1'(T) + y'(0)y_2'(T)$$

Ahora veamos que tiene que suceder con y_1, y_2 cuando $y(0) = y(T)$ y $y'(0) = y'(T)$:

$$y(T) = y(T)y_1(T) + y'(T)y_2(T)$$

$$y'(T) = y(T)y_1'(T) + y'(T)y_2'(T)$$

Sea la matriz

$$Y(T) = \begin{bmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{bmatrix}.$$

Queremos que el sistema

$$Y(T)\begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix}$$

tenga soluciones no triviales, es decir, que el vector $\begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix}$ sea un vector propio de $Y(T)$ asociado al valor propio $\lambda = 1$.
Esto ocurre si y solo si

$$\det(Y(T) - I) = 0.$$

Calculamos:

$$Y(T) - I = \begin{bmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) - 1 \end{bmatrix},$$

por lo que

$$\det(Y(T) - I) = (y_1(T) - 1)(y_2'(T) - 1) - y_2(T) \cdot y_1'(T).$$

Así, la condición necesaria y suficiente para que exista una solución no trivial es:

$$(y_1(T) - 1)(y_2'(T) - 1) - y_2(T)y_1'(T) = 0.$$

b) Analice la EDO

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$$

con f una función T periódica.
Pauta: Usemos variación de parámetros para obtener la solución particular de la EDO:

$$y_p(t) = y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx - y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx$$

Tomando $t_0 = 0$:

$$y_p(t) = y_2(t)\int_{0}^{t} \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx - y_1(t)\int_{0}^{t} \frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx$$

Ahora, usando que la solución general estará dada por $y(t) = y_p(t) + y_h(t) = y_p(t) + Ay_1(t) + By_2(t)$ tendremos

$$y(0) = y_p(0) + Ay_1'(0) + By_2'(0) = A. \quad (y_p(0) \text{ es 0 porque nos quedan las integrales de 0 a 0})$$

$$y'(0) = y_p'(0) + Ay_1'(0) + By_2'(0) = B. \quad (\text{queda propuesto verificar que } y_p'(0) = 0)$$

También notamos que si $y(t)$ es solución entonces $g(t) = y(t+T)$ también lo será:

$$g''(t) + a(t)g'(t) + b(t)g(t) = y''(t+T) + a(t+T)y'(t+T) + b(t+T)y(t+T) = f(t+T) = f(t)$$

donde se usó la periodicidad de a, b y f, junto a que y solución implica que $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ para todo t (en particular para $t+T$).
Luego de igual manera que en la parte anterior llegamos a un sistema de ecuaciones similar. Veamos qué tiene que suceder con y_1, y_2 cuando $y(0) = y(T)$ y $y'(0) = y'(T)$:

$$y(T) = y_p(T) + y(T)y_1(T) + y'(T)y_2(T)$$

$$y'(T) = y_p'(T) + y(T)y_1'(T) + y'(T)y_2'(T)$$

Reordenando los términos:

$$\begin{aligned} y(T) - y(T)\,y_1(T) - y'(T)\,y_2(T) &= y_p(T) \\ y'(T) - y(T)\,y_1'(T) - y'(T)\,y_2'(T) &= y_p'(T) \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} (1 - y_1(T))\,y(T) - y_2(T)\,y'(T) &= y_p(T) \\ -y_1'(T)\,y(T) + (1 - y_2'(T))\,y'(T) &= y_p'(T) \end{aligned}$$

Y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 - y_1(T) & -y_2(T) \\ -y_1'(T) & 1 - y_2'(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p(T) \\ y_p'(T) \end{bmatrix}$$

Sea la matriz

$$A(T) = \begin{bmatrix} 1 - y_1(T) & -y_2(T) \\ -y_1'(T) & 1 - y_2'(T) \end{bmatrix},$$

tenemos el sistema lineal:

$$A(T) \begin{bmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p(T) \\ y_p'(T) \end{bmatrix}.$$

El sistema tiene al menos una solución si y solo si el determinante de $A(T)$ es distinto de cero, o bien si es cero y el vector del lado derecho pertenece al rango de $A(T)$; esto es,

$$\text{El sistema tiene solución} \iff \det(A(T)) \neq 0 \vee \left(\det(A(T)) = 0 \ \wedge \ \begin{bmatrix} y_p(T) \\ y_p'(T) \end{bmatrix} \in \text{Rango}(A(T)) \right).$$

P2. Sobre un cuerpo que cae en un fluido relativamente denso, aceite por ejemplo, actúan tres fuerzas: el peso debido a la gravedad g, una fuerza de empuje E que actúa en sentido contrario al peso y una fuerza de resistencia R que actúa en sentido contrario al sentido del movimiento. La magnitud de la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.

Supongamos que una esfera de radio a y densidad ρ cae libremente en un fluido viscoso de densidad ρ_0 y coeficiente de viscosidad μ. En estas condiciones la fuerza de resistencia está dada por la Ley de Stokes:

$$R = 6\pi\mu a v,$$

donde v es la velocidad de la esfera.

Plantee la EDO de orden 2 que rige el movimiento de la esfera y determine la velocidad límite que alcanza en función de los parámetros del problema. Explique su respuesta.

Ind: Recuerde que si a es el radio de la esfera, entonces su volumen es $\frac{4\pi}{3}a^3$.

Pauta: De acuerdo al enunciado hay 3 fuerzas actuando sobre la esfera; la fuerza peso, el empuje E y la resistencia R.

Sabemos por el enunciado que la magnitud del empuje es igual al peso del fluido desplazado por la esfera, es decir:

$$E = m_{\text{fluido}} \cdot g = (V_{\text{esfera}} \cdot \rho_0)g = \frac{4\pi}{3}a^3\rho_0 g$$

Donde se usó que la masa del fluido que desplaza la esfera es igual a la densidad del fluido por el volumen de la esfera V_{esfera} y que al mismo tiempo por la indicación $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi}{3}a^3$

Luego sea m_{esfera} la masa de la esfera, tenemos que como conocemos su densidad ρ la podemos calcular como

$$m_{\text{esfera}} = V_{\text{esfera}} \cdot \rho = \frac{4\pi}{3}a^3\rho$$

Ahora para plantear la EDO establecemos $y(t)$ como la posición de la esfera, esto implica que su velocidad v será $\dot{y}(t)$.

Como la esfera va cayendo nuestro sistema de referencia va a apuntar hacia abajo (da lo mismo en verdad) por lo que la sumatoria de fuerzas y la segunda ley de Newton nos entrega la siguiente EDO

$$m_{\text{esfera}}\ddot{y}(t) = m_{\text{esfera}}g - E - R$$

$$\iff \frac{4\pi}{3}a^3\rho \cdot \ddot{y}(t) = \frac{4\pi}{3}a^3\rho g - \frac{4\pi}{3}a^3\rho_0 g - 6\pi\mu a \cdot \dot{y}(t)$$

Normalizando la expresión y reordenando términos tenemos

$$\frac{4}{3}a^3\rho \cdot \ddot{y}(t) + 6\mu a \cdot \dot{y}(t) = \frac{4}{3}a^3\rho g - \frac{4}{3}a^3\rho_0 g$$

$$\iff \ddot{y}(t) + \frac{9\mu}{2a^2\rho} \cdot \dot{y}(t) = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{g(\rho - \rho_0)}{\rho}$$

Para simplificar las cosas llamemos $b = \frac{9\mu}{2a^2\rho}$ y $c = \frac{g(\rho-\rho_0)}{\rho}$. Con esto la EDO queda

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) = c$$

Partamos resolviendo la EDO homogénea, la cual tiene el siguiente polinomio característico:

$$\lambda^2 + b\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda + b) = 0$$

Lo que nos da las soluciones $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -b$.
Luego la solución de la EDO homogénea es

$$y_h(t) = A + Be^{-bt}. \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

En otras palabras su base de soluciones es $\{1, e^{-bt}\}$. Con esto es posible usar variación de parámetros y obtener la solución particular.
Usando que $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = e^{-bx}$ la fórmula nos entrega:

$$y_p(t) = e^{-bt} \int_{t_0}^{t} \frac{\bar{Q}(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx - \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-bx}\bar{Q}(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx$$

En este como ya normalizamos al EDO $\bar{Q} = c$. Ahora calculemos el Wronskiano.:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = -be^{-bx} - 0 = -be^{-bx}$$

Luego la fórmula queda

$$y_p(t) = e^{-bt} \int_{t_0}^{t} \frac{c}{-be^{-bx}}\, dx - \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-bx}c}{-be^{-bx}}\, dx = -e^{-bt} \int_{t_0}^{t} \frac{ce^{bx}}{b}\, dx + \int_{t_0}^{t} \frac{c}{b}\, dx$$

$$= -e^{-bt}\frac{c}{b}\left(\frac{e^{bt}}{b} - \frac{e^{bt_0}}{b}\right) + \frac{c}{b}(t - t_0)$$

Eligiendo $t_0 = 0$ tenemos:

$$y_p(t) = -e^{-bt}\frac{c}{b}\left(\frac{e^{bt}}{b} - \frac{1}{b}\right) + \frac{c}{b}t = -\frac{c}{b^2} + \frac{e^{-bt}c}{b^2} + \frac{c}{b}t$$

Notamos que la parte $-\frac{c}{b^2} + \frac{e^{-bt}c}{b^2}$ va a ser absorbida por la solución homogénea.
Luego la solución general queda

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A + Be^{-bt} + \frac{c}{b}t. \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Como nos piden ver la velocidad límite calculamos $\dot{y}(t)$:

$$\dot{y}(t) = -bBe^{-bt} + \frac{c}{b}$$

Notamos que si tomamos límite cuando $t \to \infty$ solo sobrevive el término $\frac{c}{b}$:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \lim_{t\to\infty} (-bBe^{-bt} + \frac{c}{b}) = \frac{c}{b} = \frac{2a^2 g(\rho - \rho_0)}{9\mu}$$

Con lo que hemos encontrado la velocidad límite.

P3. *a*) Considera la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(4)} + 2y''' + 11y'' + 2y' + 10y = 0.$$

Si la función $\cos x$ es una solución de la ecuación, encuentre una base para el espacio vectorial de soluciones de la ecuación.
Pauta: Si la función $\cos(x)$ es solución, entonces $\sin(x)$ también lo será (es fácil ver que la derivada de cualquier solución sigue siendo solución).
Esto nos permite saber que i y $-i$ son raíces del polinomio característico (recuerde que $e^{ix} =$

$\cos(x) + i\sin(x)$ y $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$), o en otras palabras que (λ^2+1) divide el polinomio característico.
Veamos ahora cómo se ve su polinomio:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

Como $(\lambda^2 + 1)$ divide su polinomio podemos factorizarlo de la siguiente manera:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda^2 + 1)q(\lambda)$$

Donde q es algún otro polinomio de grado 2.
Acá hay dos formas de obtener q, la primera es dividir los polinomios a mano, la segunda es sacarlo a mano:
Sabemos que q es de grado 2 y por lo tanto tendrá la forma

$$q(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

(en particular podemos notar rápidamente que $a = 1$ y $c = 10$, pero hagamos todo el desarrollo)
Luego

$$(\lambda^2+1)q(\lambda) = (\lambda^2+1)(a\lambda^2+b\lambda+c) = a\lambda^4+b\lambda^3+c\lambda^2+a\lambda^2+b\lambda+c = a\lambda^4+b\lambda^3+(c+a)\lambda^2+b\lambda+c$$

De donde obtenemos que $a = 1, b = 2, c = 10$, es decir:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 10)$$

Luego las otras 2 raíces del polinomio vendrás dadas por

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

Luego $e^{(-1+3i)x} = e^{-x}e^{3ix}$ es solución al igual que $e^{(-1-3i)x} = e^{-x}e^{-3ix}$. Esto nos permite concluir que una base de las soluciones de esta EDO homogéneas es:

$$\{\cos(x), \sin(x), e^{-x}\cos(3x), e^{-x}\sin(3x)\}$$

b) Encuentra la solución general, es decir $y = y_h + y_p$, para la ecuación

$$y'' - 6y' + 5y = f(x),$$

donde la función f está definida como $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.
Indicación: Puede servirte recordar que la integral definida $\int_0^x g(t)dt$ es una primitiva de la función $g(x)$ para cualquier g integrable.

Pauta: Resolvamos primero la EDO homogénea con el fin de utilizar variación de parámetros.
La EDO homogénea

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

tiene como polinomio:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \iff (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

Lo que tiene como raíces $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.
Luego $\{e^x, e^{5x}\}$ es una base de las soluciones de la EDO homogénea:

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{5x}. \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Ahora apliquemos variación de parámetros con $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{5x}$:

$$y_p(x) = e^{5x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^t\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt - e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{5t}\bar{Q}(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

Donde $\bar{Q}(x) = f(x)$. Calculemos el Wronskiano:

$$W[y_1,y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 5e^xe^{5x} - e^{5x}e^x = 4e^{6x}$$

Reemplazando en la fórmula tenemos:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{5x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^tf(t)}{4e^{6t}}\,dt - e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{5t}f(t)}{4e^{6t}}\,dt \\ &= \frac{e^{5x}}{4}\int_{x_0}^{x} e^{-5t}f(t)\,dt - \frac{e^x}{4}\int_{x_0}^{x} e^{-t}f(t)\,dt \end{aligned}$$

Luego tomando $x_0 = 0$ tendremos que como en el intervalo $(0,x)$ f es igual a 1 (para $x > 0$) la fórmula queda

$$\begin{aligned} y_p(x) = \frac{e^{5x}}{4}\int_0^x e^{-5t}\,dt - \frac{e^x}{4}\int_0^x e^{-t}\,dt &= \frac{e^{5x}}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{e^{-5x}}{5}\right) - \frac{e^x}{4}\left(1 - e^{-x}\right) = \frac{e^{5x}}{20} - \frac{1}{20} - \frac{e^x}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^{5x}}{20} - \frac{e^x}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ahora, si $x \leq 0$ las cosas cambian pues en el intervalo $(x,0)$ f será 0, por lo que la fórmula queda:

$$y_p(x) = e^{5x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^t\cdot 0}{4e^{6t}}\,dt - e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{5t}\cdot 0}{4e^{6t}}\,dt = 0$$

Es decir

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{e^{5x}}{20} - \frac{e^x}{4} + \frac{1}{5} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Luego la solución general de la EDO será

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{5x} + y_p(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} \bar{A}e^x + \bar{B}e^{5x} + \frac{1}{5} & \text{para } x > 0 \\ Ae^x + Be^{5x} & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Con $A, \bar{A}, B, \bar{B} \in \mathbb{R}$ ($\bar{A}$ y $\bar{B}$ absorben los términos $\frac{e^{5x}}{20} - \frac{e^x}{4}$ de $y_p(x)$)

P4. Para los siguientes Problemas de Cauchy, determine condiciones sobre x_0 para que exista una única solución y en tales casos especifique su regularidad y en qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ quedaría definida:

$$(1)\begin{cases} x^2y'' + 9xy' - 20y = 0 \\ y(x_0) = a,\ y'(x_0) = b \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x^2y''' - 5xy'' + 5y' = -15x^4 \\ y(x_0) = c,\ y'(x_0) = d \end{cases}$$

Corrobore esto encontrando dos soluciones distintas de (1) que satisfagan $y(0) = y'(0) = 0$.
Pauta: La ecuación normalizada del problema (1) queda

$$y'' + \frac{9}{x}y' - \frac{20}{x^2}y = 0$$

Los coeficientes son continuos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, de manera que habrá unicidad de soluciones para $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $x_0 > 0$, entonces tal solución será de clase $C^2((0, \infty))$; si $x_0 < 0$, será de clase $C^2((-\infty, 0))$.

La ecuación normalizada del problema (2) queda

$$y''' - \frac{5}{x}y'' + \frac{5}{x^2}y' = -15x^2$$

Los coeficientes son nuevamente continuos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, de manera que habrá unicidad de soluciones para $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $x_0 > 0$, entonces tal solución será de clase $C^3((0, \infty))$. Por otro lado, si $x_0 < 0$, será de clase $C^3((-\infty, 0))$.

Para ilustrar la no unicidad de soluciones de (1) tomando $a = b = 0$, recordemos que la solución general de la ecuación (1) es

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^{10}}$$

Tomemos

$$y_1(x) = x^2 \quad (C_1 = 1 \text{ y } C_2 = 0), \quad y_2(x) = 0 \quad (C_1 = C_2 = 0)$$

Ambas soluciones son distintas y satisfacen $x^2 y'' + 9xy' - 20y = 0$ e $y(0) = y'(0) = 0$.