Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Auxiliar 5

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

P1. El objetivo de este problema es resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \text{ con } x > 0$$

Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Por inspección, encuentre una solución a la ecuación homogénea.
Pauta: Como los coeficientes son polinomios sugerimos una solución de la forma $y_1 = x^n$. Para verificar esto y encontrar el valor de n reemplazamos en la EDO homógenea:

$$x^2(x^n)'' - 3x(x^n)' + 4(x^n) = 0$$

$$x^2(n(n-1)x^{n-2}) - 3x(nx^{n-1}) + 4x^n = 0$$

$$n(n-1)x^n - 3nx^n + 4x^n = 0$$

Como $x > 0$ podemos dividir por x^n:

$$n(n-1) - 3n + 4 = 0 \iff n^2 - 4n + 4 = 0$$

Factorizando queda

$$(n-2)^2 = 0$$

Por lo que se confirma que x^n es solución con $n = 2$.

b) Encuentre una solución linealmente independiente y exprese la solución homogénea de la ecuación.
Pauta: Usemos el Wronskiano y la fórmula de Abel para calcular una segunda solución homogénea.
Notemos que combinando las fórmulas se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(x_0)}{y_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\bar{a}_1(s)\,ds\right)$$

Lo que en particular al integrar y multiplicar por y_1 nos deja

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_0(t_0)}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\bar{a}_1(s)\,ds\right)dt$$

Desarrollemos la expresión (recuerde que $\bar{a}_1(x) = -\frac{3}{x}$ es el coeficiente acompañando a y' en la EDO normalizada).:

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W(x_0)}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\bar{a}_1(s)\,ds\right)dt = x^2\int_{x_0}^{x}\frac{W_0(t_0)}{t^4}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{3}{s}\,ds\right)dt$$

$$= x^2 \int_{x_0}^{x} \frac{W(x_0)}{t^4}(t^3 t_0^{-3})dt = x^2 t_0^3 \int_{x_0}^{x} \frac{W(x_0)}{t} dt = x^2 t_0^3 W(x_0)(\ln(x) - \ln(x_0))$$

Eligiendo $x_0 = t_0 = 1$ por conveniencia tenemos

$$y_2(x) = x^2 t_0^{-3} W(x_0)(\ln(x) - \ln(x_0)) = x^2 W(1) \ln(x)$$

Luego tenemos que el conjunto $\{x^2, x^2 \ln(x)\}$ es una base de las soluciones homogéneas. Note que x^2 y $x^2 \ln(x)$ son linealmente independientes (puede verificarlo usando el Wronskiano como sale en el resumen).
Concluimos que la solución homogénea es de la forma $y_h(x) = Ax^2 + Bx^2 \ln(x)$. $A, B \in \mathbb{R}$

c) Utilizando variación de parámetros, encuentre una solución particular.
Pauta: El método nos dice que la solución particular tendrá la siguiente forma:

$$y_p(x) = y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt - y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

Reemplazando $\bar{Q}(x) = \ln(x)$ (a lo que está igualado la EDO no homogénea normalizada) y $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln(x)$ (nuestra base homogénea), tenemos:

$$y_p(x) = x^2 \ln(x) \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 \ln(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt - x^2 \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 \ln(t)^2}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

Calculemos el Wronskiano $W[y_1, y_2](x) = W[x^2, x^2 \ln(x)]$:

$$W[x^2, x^2 \ln(x)] = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln(x) \\ 2x & 2x \ln(x) + x \end{vmatrix} = 2x^3 \ln(x) + x^3 - 2x^3 \ln(x) = x^3$$

Por último reemplazando esto en nuestra expresión nos queda:

$$y_p(x) = x^2 \ln(x) \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 \ln(t)}{t^3} dt - x^2 \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 \ln(t)^2}{t^3} dx = x^2 \ln(x) \int_{x_0}^{x} \frac{\ln(t)}{t} dt - x^2 \int_{x_0}^{x} \frac{\ln(t)^2}{t} dx$$

Resolviendo las integrales llegamos a

$$y_p(x) = x^2 \ln(x) \left(\frac{\ln^2(x)}{2} - \frac{\ln^2(x_0)}{2} \right) - x^2 \left(\frac{\ln^3(x)}{3} - \frac{\ln^3(x_0)}{3} \right)$$

Como podemos elegir el x_0 que nos convenga mientras esté en el intervalo donde esté definida la EDO, elegimos $x_0 = 1$ y tenemos:

$$y_p(x) = \frac{x^2 \ln^3(x)}{2} - \frac{x^2 \ln^3(x)}{3} = \frac{x^2 \ln^3(x)}{6}$$

d) Entregue la solución general de la ecuación.
Pauta: Por último la solución general será la suma de la solución particular con la solución homogénea:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x^2 \ln^3(x)}{6} + Ax^2 + Bx^2 \ln(x).\ A, B \in \mathbb{R}$$

P2. *a*) Estudie las soluciones de la EDO

$$y'' + \lambda y = 0\,;\ y(0) = y(1) = 0$$

Pauta: partamos por el caso $\mu = 0$:

$$y'' = 0$$

Integrando dos veces tenemos que

$$y(x) = Ax + B$$

Usando condiciones de borde

$$y(1) = A = 0$$

$$y(0) = B = 0$$

Luego la solución es trivial.
Veamos ahora para $\lambda > 0$. Por conveniencia usemos $\lambda = k^2$, con $k > 0$. Nos queda el siguiente polinomio característico:

$$\mu^2 + k^2 = 0 \iff (\mu - ik)(\mu + ik) = 0$$

Lo que nos da la siguiente solución

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$y(0) = A = 0$$

$$y(1) = B\sin(k) = 0$$

Como no queremos soluciones triviales tomamos $B \neq 0$ y concluimos que $k = n\pi$, para $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Es decir, la solución no trivial existe cuando $\lambda = n^2\pi^2$ y tiene la forma $y_n(x) = B_n \sin(n\pi x)$.
Por último si $\lambda < 0$, definimos por conveniencia $\lambda = -k^2$ para $k > 0$.
De esta forma nos queda el siguiente polinomio característico:

$$\mu^2 - k^2 = 0 \iff (\mu - k)(\mu + k) = 0$$

Lo que entrega la siguiente solución

$$y(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$$

Imponiendo condiciones de borde:

$$y(0) = A + B = 0 \iff A = -B$$

$$y(1) = Ae^{-k} + Be^{k} = Ae^{-k} - Ae^{k} = 0 \iff A(e^{-k} - e^{k}) = 0$$

Como no queremos que nuestra solución sea trivial tomaremos $A \neq 0$ lo que indica que $e^{-k} - e^{k} = 0 \iff k = 0$.
Luego la solución es trivial de todas formas y se concluye que bajo $\lambda < 0$ la única solución es $y = 0$.

b) Haga lo mismo con

$$y'' + \lambda y = f(x)\,;\; y(0) = y(1) = 0$$

y encuentre las condiciones necesarias sobre f para que la EDO tenga solución.
Pauta: Sabemos por la parte anterior que la solución homogénea no es trivial solamente para $\lambda > 0$, con $\lambda = n^2\pi^2$. Esto nos daba las soluciones homogéneas $y_1 = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ y $y_2 = \sin(\sqrt{\lambda}x)$ linealmente independientes. Calculemos entonces la solución particular usando la fórmula.

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt$$

Calculemos el Wronskiano

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) & -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda}\cos^2(\sqrt{\lambda}x) - \sqrt{\lambda}\sin^2(\sqrt{\lambda}x) = -\sqrt{\lambda}$$

Luego y_p nos queda:

$$y_p(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)\int_{x_0}^{x} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt - \cos(\sqrt{\lambda}x)\int_{x_0}^{x} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt$$

Entonces la solución general queda

$$y(x) = y_p(x) + Ay_1(x) + By_2(x)$$

$$= \sin(\sqrt{\lambda}x)\int_{x_0}^{x} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt - \cos(\sqrt{\lambda}x)\int_{x_0}^{x} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt + A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Aplicando las condiciones de borde y eligiendo $x_0 = 0$

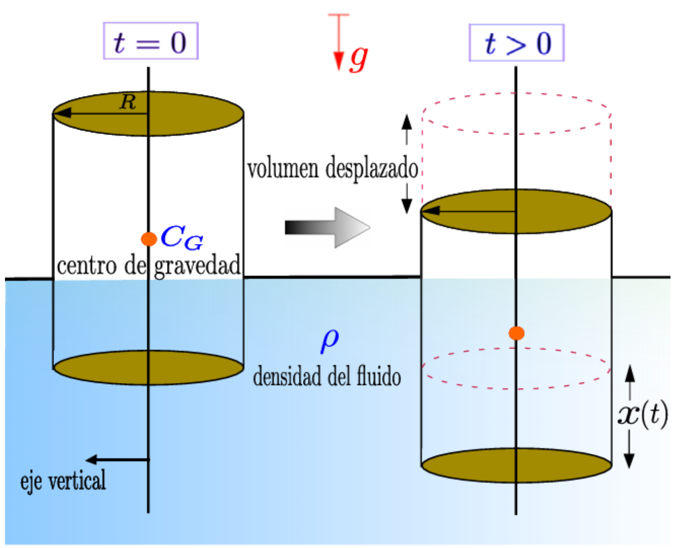
$$y(0) = A = 0$$

$$y(1) = \sin(\sqrt{\lambda})\int_{0}^{1} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt - \cos(\sqrt{\lambda})\int_{0}^{1} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Lo que implica que $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)f(t)}{-\sqrt{\lambda}}\,dt = 0$ (porque $\cos(n\pi) \neq 0$). Por lo que concluimos que la condición necesaria sobre f es que se cumpla que

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda}t)f(t)\,dt = 0$$

P3. Un tanque cilíndrico de radio R esta sumergido en un líquido cuya densidad es ρ. Para medir la masa del objeto se empuja suavemente el cilindro procediendo a medir el período de oscilación T. Se pide encontrar la ecuación de movimiento, resolverla y finalmente calcular la masa del cilindro.



Ind: Considere que el eje del cilindro se mantiene vertical, denote ademas como C_G al centro de gravedad del objeto y tenga en cuenta el *principio de Arquímedes*: "Un cuerpo al ser sumergido parcial o totalmente en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al del peso del fluido que desplaza."

Pauta: Sea $x(t)$ la distancia que se desplaza el cilindro hacia abajo, notamos que el Volumen desplazado $V(t)$ dependerá de $x(t)$. También notamos que como está aumentando el Volumen sumergido, está aumentando el empuje.
Sabiendo esto, hay dos fuerzas en juego, el peso y el empuje de Arquímedes, el cual por la indicación será el peso del fluido desplazado:

$$\text{Peso: } mg \tag{1}$$
$$\text{Empuje: } E_0 + m_{\text{fluido}}g = E_0 + \rho V(t)g \tag{2}$$

Donde E_0 es el empuje inicial que experimenta el cilindro en el tiempo 0, es decir, $E_0 = \rho V_0 g$. Aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\ddot{x} = \text{Peso} - \text{Empuje} = mg - \rho g(V_0 + V(t))$$

El Volumen de la porción desplazada del cilindro se calcula $V(t) = \pi R^2 x(t)$, lo que reemplazado en la última ecuación queda

$$m\ddot{x} = mg - \rho g(V_0 + \pi R^2 x(t))$$

Luego notamos que evaluando $t = 0$ tenemos la siguiente igualdad

$$0 = mg - \rho g(V_0 + \pi R^2 \cdot 0) \iff mg = V_0 \rho g$$

Luego la EDO que habíamos derivado de la segunda ley de Newton se verá así:

$$m\ddot{x} = V_0\rho g - \rho g(V_0 + V(t)) = -\rho g V(t) = -\rho g \pi R^2 x(t)$$

Normalizando y llamando $\omega^2 = \frac{\rho g \pi R^2}{m}$ tenemos lo siguiente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x(t) = 0$$

que es la ecuación de un oscilador armónico.
Esta EDO la podemos resolver con polinomio característico (aunque su solución ya es bastante conocida):

$$\text{El polinomio: } \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = 0$$

Lo que nos lleva a la clásica solución

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Entonces tendremos que el período de oscilación será $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g R^2}}$.
Ahora es posible despejar m en términos de T:

$$T^2 = \frac{4\pi m}{\rho g R^2} \iff m = \frac{\rho g R^2 T^2}{4\pi}$$

Con lo que queda encontrada la masa del cilindro.

P4. Considere la ecuación de segundo orden homogénea

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = 0, \quad s \in]0,1[\quad (1)$$

a) Compruebe que $v_1(s) = \frac{1}{1-s^2}$ es solución de (1).
Pauta: Calculemos las derivadas de $v_1(s)$ para reemplazar en la EDO:

$$v_1'(s) = 2s(1-s^2)^{-2}$$
$$v_1''(s) = 2(1-s^2)^{-2} + 8s^2(1-s^2)^{-3}$$

Luego tenemos que reemplazando en la EDO se tiene:

$$v_1'' - \frac{1}{s}v_1' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v_1$$
$$= 2(1-s^2)^{-2} + 8s^2(1-s^2)^{-3} - \frac{1}{s}\left(2s(1-s^2)^{-2}\right) - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}\left(\frac{1}{1-s^2}\right)$$
$$= \cancel{2(1-s^2)^{-2}} + \cancel{8s^2(1-s^2)^{-3}} - \cancel{2(1-s^2)^{-2}} - \cancel{\frac{8s^2}{(1-s^2)^3}} = 0$$

Por lo tanto v_1 es solución.

b) Encuentre una solución $v_2(s)$ de (1) que sea linealmente independiente con $v_1(s)$, y con ello todas las soluciones $v(s)$ de (1).
Pauta: Utilizando la fórmula de Abel tenemos:

$$W[v_1, v_2](s) = W(s_0)\exp\left(\int_{s_0}^{s} \frac{1}{t}dt\right)$$
$$\iff v_1v_2' - v_2v_1' = W(s_0)\exp\left(\int_{s_0}^{s} \frac{1}{t}dt\right)$$

Dividiendo ambos lados por v_1^2:

$$\frac{v_1v_2' - v_2v_1'}{v_1^2} = \frac{W(s_0)}{v_1^2}\exp\left(\int_{s_0}^{s} \frac{1}{t}dt\right) = \frac{W(s_0)}{v_1^2}\exp\left(\ln(s) - \ln(s_0)\right) = \frac{W(s_0)x}{v_1^2 s_0}$$
$$\iff \left(\frac{v_2}{v_1}\right)' = \frac{W(s_0)s}{v_1^2 s_0}$$

Integrando a ambos lados y reemplazando $v_1(s) = \frac{1}{1-s^2}$:

$$v_2(s)(1-s^2) - v_2(s_0)(1-s_0^2) = \int_{s_0}^{s} \frac{W(s_0)x(1-x^2)^2}{s_0}dx$$
$$\iff v_2(s)(1-s^2) - v_2(s_0)(1-s_0^2) = \frac{W(s_0)}{6s_0}\left((1-s_0^2)^3 - (1-s^2)^3\right)$$

Usando $s_0 = 1$ para simplificar las cosas (Nótese que aunque $s_0 \notin]0,1[$, esto está permitido pues la integral ignora puntos fijos, es decir, mientras estemos integrando sobre los límites de nuestro intervalo y la integral no diverja, no hay problema):

$$v_2(s)(1-s^2) = \frac{W(1)}{6}(s^2-1)^3$$
$$\iff v_2(s) = \frac{W(1)}{6}(s^2-1)^2$$

Luego podemos concluir que nuestro espacio de soluciones homogéneas tiene como base el conjunto $\{\frac{1}{1-s^2}, (1-s^2)^2\}$. Es decir, encontramos que $(1-s^2)^2$ es una solución l.i. de la EDO homogénea.
Entonces la solución homogénea es

$$v_h(s) = \frac{A}{1-s^2} + B(1-s^2)^2.\ A, B \in \mathbb{R}$$

c) Encuentre todas las soluciones $v(s)$ de

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = \frac{s^4}{1-s^2}, \quad s \in]0,1[.$$

Pauta: Como ya tenemos la solución homogénea podemos usar variación de parámetros para encontrar la solución general.
La fórmula nos dice

$$v_p(s) = v_2(s)\int_{s_0}^{s} \frac{v_1(t)\bar{Q}(t)}{W[v_1,v_2](t)}\,dt - v_1(s)\int_{s_0}^{s} \frac{v_2(t)\bar{Q}(t)}{W[v_1,v_2](t)}\,dt$$

Calculemos el Wrosnkiano

$$W[v_1,v_2] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-s^2} & (1-s^2)^2 \\ 2s(1-s^2)^{-2} & -4s(1-s^2) \end{vmatrix} = -4s - 2s = -6s$$

Luego reemplazando esto en la fórmula junto a los valores de v_1 y v_2:

$$= (1-s^2)^2 \int_{s_0}^{s} \frac{t^4}{-6t(1-t^2)^2}\,dt - \frac{1}{1-s^2}\int_{s_0}^{s} \frac{(1-t^2)^2t^4}{-6t(1-t^2)}\,dt$$

$$= -\frac{(1-s^2)^2}{6}\int_{s_0}^{s} \frac{t^3}{(1-t^2)^2}\,dt + \frac{1}{6(1-s^2)}\int_{s_0}^{s}(1-t^2)t^3\,dt$$

Resolviendo las integrales se llega a:

$$-\frac{(1-s^2)^2}{12}\left(\frac{1}{1-s^2} + \ln(1-s^2) - \frac{1}{1-s_0^2} - \ln(1-s_0^2)\right) + \frac{1}{72(1-s^2)}\left(-2s^6 + 3s^4 + 2s_0^6 - 3s_0^4\right)$$

Eligiendo $s_0 = 0$ tenemos:

$$-\frac{(1-s^2)^2}{12}\left(\frac{1}{1-s^2} + \ln(1-s^2) - 1\right) + \frac{1}{72(1-s^2)}\left(-2s^6 + 3s^4\right)$$

Luego

$$v_p(s) = -\frac{(1-s^2)^2\ln(1-s^2) + (1-s^2)}{12} + \frac{(1-s^2)^2}{12} + \frac{1}{72(1-s^2)}\left(-2s^6 + 3s^4\right)$$

Nótese que el término $\frac{(1-s^2)^2}{12}$ será absorbido por la solución homogénea.
Dada la solución particular y la solución homogénea, la solución general es

$$v(s) = v_p(s) + v_h(s)$$

$$= -\frac{(1-s^2)^2\ln(1-s^2) + (1-s^2)}{12} + \frac{1}{72(1-s^2)}\left(-2s^6 + 3s^4\right) + \frac{A}{1-s^2} + B(1-s^2)^2. \; A, B \in \mathbb{R}$$