Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 5: Método de variación de parámetros

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

Resumen

- De aquí para abajo, consideramos la siguiente EDO lineal de segundo orden en un intervalo I. Notemos que es su versión **normalizada.**

$$y'' + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x), \quad x \in I \tag{1}$$

- **[Wronskiano]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Definimos su Wronskiano como sigue:

$$W[y_1, y_2](x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

- **[Fórmula de Abel]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Entonces:

$$W[y_1, y_2](x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \bar{a}_1(t)dt\right), \text{ para } x \in I$$

  donde $x_0 \in I$.

- **[Caracterización de la independencia lineal]:** Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO homogénea de (1). Entonces:

$$W[y_1, y_2](\bar{x}) \neq 0, \text{ para algún } \bar{x} \in I \iff y_1, y_2 \text{ son l.i.} \iff \forall x \in I, W[y_1, y_2](x) \neq 0$$

- **[Variación de Parámetros]**: Sean y_1, y_2 soluciones **linealmente independientes** de la EDO homogénea de (1). Entonces, una solución particular de (1) verifica:

$$y_p(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)\bar{Q}(t)}{W[y_1, y_2](t)}\,dt$$

P1. El objetivo de este problema es resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln(x), \text{ con } x > 0$$

Para esto, se propone el siguiente esquema:

a) Por inspección, encuentre una solución a la ecuación homogénea.

b) Encuentre una solución linealmente independiente y exprese la solución homogénea de la ecuación.

c) Utilizando variación de parámetros, encuentre una solución particular.

d) Entregue la solución general de la ecuación.

P2. *a*) Estudie las soluciones de la EDO

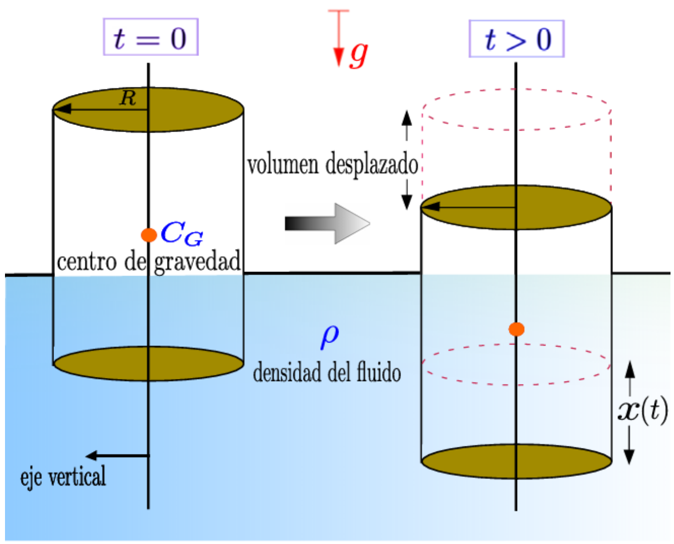
$$y'' + \lambda y = 0\ ;\ y(0) = y(1) = 0$$

b) Haga lo mismo con

$$y'' + \lambda y = f(x)\ ;\ y(0) = y(1) = 0$$

y encuentre las condiciones necesarias sobre f para que la EDO tenga solución.

P3. Un tanque cilíndrico de radio R esta sumergido en un líquido cuya densidad es ρ. Para medir la masa del objeto se empuja suavemente el cilindro procediendo a medir el período de oscilación T. Se pide encontrar la ecuación de movimiento, resolverla y finalmente calcular la masa del cilindro.



Ind: Considere que el eje del cilindro se mantiene vertical, denote ademas como CG al centro de gravedad del objeto y tenga en cuenta el *principio de Arquímedes*: "Un cuerpo al ser sumergido parcial o totalmente en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al del peso del fluido que desplaza."

P4. Considere la ecuación de segundo orden homogénea

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = 0, \quad s \in]0,1[\quad (1)$$

a) Compruebe que $v_1(s) = \frac{1}{1-s^2}$ es solución de (1).

b) Encuentre una solución $v_2(s)$ de (1) que sea linealmente independiente con $v_1(s)$, y con ello todas las soluciones $v(s)$ de (1).

c) Encuentre todas las soluciones $v(s)$ de

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = \frac{s^4}{1-s^2}, \quad s \in]0,1[.$$