



Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS

FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601, 2024-1.

Secciones coordinadas.

Guía 2: Ecuaciones diferenciales de orden superior

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes

a) $y'' + 4y' + 2y = 0$.

b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

c) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

d) $(D^2 + 2D + 5)^2 y = 0$

e) $(D^2 + D + 1)(D^3 + 6D + 10)^3 y = 0$

f) $(D - 1)^3(D - 2)(D^2 + D + 1)(D^3 + 6D + 10)^3 y = 0$

P2. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando su intervalo de definición.

a) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec(2x)$.

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln(x)$.

c) $y'' - y' + 7y = x^{10} + e^x \sin(3x)$.

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -12$.

b) $y'' - 8y' + 16y = 0$ con $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = -\frac{1}{3}$.

c) $x^2 y'' + 9x y' - 20y = 0$ (use el cambio de variables $e^t = x$).

d) $y^{(4)} - y'' = 0$

e) $y^{(4)} - y = 0$ (suponga soluciones de la forma $y = e^{\lambda t}$)

P4. Determine la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 10y = g(x), \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0,$$

con $g(x) = 1$ si $0 \leq x \leq \pi$ y $g(x) = 0$ para $x > \pi$. Ind.: Observe que la solución es continua y tiene primera derivada continua.

• Problemas de Modelamiento

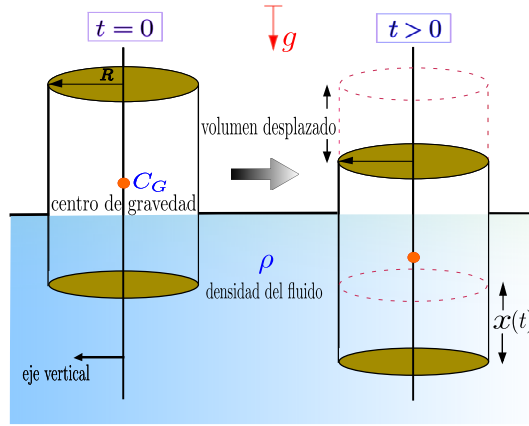
P5. Encuentre la solución general de la ecuación $(D^2 + 2bD + a^2)y = 0$, donde a, b son constantes con $b < a$, $a > 0$. Asegurese de considerar todos los casos. Si esta ecuación corresponde al movimiento de una masa en un péndulo amortiguado, interprete la condición $b < a$.

P6. Encuentre la solución de la ecuación del péndulo amortiguado con fuerza externa

$$(D^2 + 2bD + a^2)y = \cos(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Considere los casos en que a) $b = 0$, $a = \omega$ y b) $b \neq 0$ o $a \neq \omega$. Describa la solución encontrada, indicando en qué casos es acotada. Ind.: Puede usar el método de variación de parámetros, pero puede ser más sencillo usar el método de coeficientes indeterminados, observando que $(D^2 + \omega^2) \cos(\omega t) = 0$.

P7. Un tanque cilíndrico de radio R está sumergido en un líquido cuya densidad es ρ . Para medir la masa del objeto se empuja suavemente el cilindro procediendo a medir el período de oscilación T . Se pide encontrar la ecuación de movimiento, resolverla y finalmente calcular la masa del cilindro.



Ind.: Considere que el eje del cilindro se mantiene vertical, denote además como C_G al centro de gravedad del objeto y tenga en cuenta el *principio de Arquímedes*: “Un cuerpo al ser sumergido parcial o totalmente en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al del peso del fluido que desplaza”.

P8. Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (1)$$

donde p y q son funciones continuas, en un abierto común.

- a) Haga el cambio de variable $y(t) = u(t)v(t)$ en (1) y anule el coeficiente de u' que aparece, determine la función v comprobando que $v > 0$ y deduzca que (1) es equivalente a

$$u'' + r(t)u = 0. \quad (2)$$

donde $r(t) = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$.

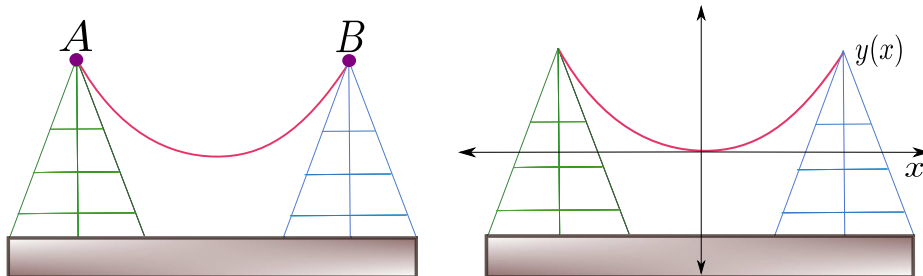
En tal caso decimos que (2) es la *forma normal* de (1).

- b) Use el método anterior para describir la ecuación de Schrodinger en una dimensión

$$y'' + \frac{2}{t}y' + \left(k + \frac{2}{t} - \frac{l(l+1)}{t^2}\right)y = 0. \quad (3)$$

donde k y l son números naturales. Sabiendo que la solución de (2) puede oscilar sólo si $r(t) > 0$, encuentre una condición para que pueda haber oscilaciones en los electrones del átomo de hidrógeno descritos por (3).

P9. Desde los extremos A y B de dos torres idénticas se encuentra suspendido un cable homogéneo sometido únicamente a la acción de su propio peso, tal como se muestra abajo en la figura izquierda. El objetivo de este problema es demostrar que, si colocamos el origen del sistema

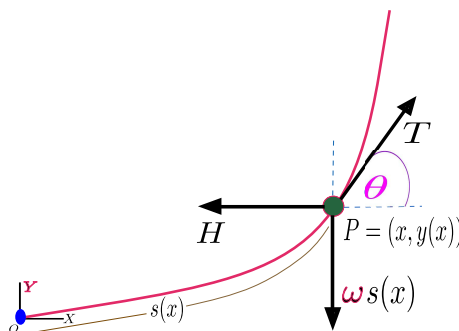


de coordenadas en la parte más baja del cable, tal como se indica en la figura de la derecha, entonces la forma del cable coincide con el gráfico de la función dada por

$$y(x) = \frac{H}{\omega} \left(\cosh \left(\frac{\omega x}{H} \right) - 1 \right),$$

donde ω es el *peso por unidad de largo* en cada punto del cable y H es la magnitud de la *tensión* del cable en su *punto más bajo*. Por ser un cable homogéneo, ω se considera constante. Para demostrar lo pedido considere que la forma del cable es el gráfico de una función suave (es decir, la función tiene suficiente regularidad para el modelo, en este caso, basta que y sea una función real dos veces diferenciable) desconocida $y(x)$, con su punto más bajo en el origen del sistema de coordenadas, y siga los siguientes pasos

- A partir de las figuras anteriores ¿cuál debería ser el valor de $y'(0)$ y porqué?.
- Considere las fuerzas externas actuando sobre todo el segmento de cable que está entre los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(x,y(x))$, cuyo largo denotaremos por $s(x)$. Cada fuerza junto con el valor de su magnitud aparece en la figura a la derecha. Usando que el cable está en reposo, plantee el equilibrio de fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, y a partir de esto deduzca que $y(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $y'' = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + (y')^2}$.



Ind.: Trate de eliminar la magnitud T y recuerde además que $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$.

- Usando el cambio de variables $u = y'$, encuentre la solución general de la EDO obtenida en la parte anterior. Finalmente determine $y(x)$.

Ind.: Al momento de resolver una de las integrales puede necesitar el cambio de variables $u = \sinh(\alpha)$. Recuerde que $1 + \sinh^2(\alpha) = \cosh^2(\alpha)$.

P10. Considere un modelo para la carga en un circuito eléctrico, dado por la solución de la EDO

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = E \cos(\omega t) \quad t > 0, \quad (4)$$

donde R , L y C son *constantes*, las cuales representan la resistencia, inductancia y capacitancia del circuito respectivamente. El término $t \mapsto E \cos(\omega t)$ (varía en el tiempo) representa una fuente de corriente alterna de frecuencia ω y amplitud dada por la constante E .

- a) Si $E = 0$ y $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, demuestre que la solución es una oscilación amortiguada de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ llamada *frecuencia natural* del circuito. Entregar un esbozo del gráfico de la solución para este caso.
- b) Si $E = 1$ y $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, demuestre que si se supone una solución particular para la carga en el circuito de la forma $q_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, entonces al imponer que q_p satisfice (4) verifique que las constantes A, B deben satisfacer

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}}.$$

Considere ahora la función

$$\omega \mapsto I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}}$$

Calcular $I'(\omega)$ (la derivada de I respecto a ω), para probar que $I(\omega)$ tiene un punto máximo en

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Verifique que $I''(\omega_R) < 0$.

- c) Se dice que el sistema entra en *resonancia* cuando $\omega \rightarrow \omega_0$. Esto corresponde a un acoplamiento entre la vibración natural del sistema y la oscilación que produce el lado derecho o término forzante. Calcule el término $\omega_0^2 - \omega_R^2$, y determine una condición en función de los parámetros del problema para que se produzca el fenómeno de resonancia, comente.

• Problemas teóricos

P11. Considere el operador xD definido por $xD(y) = xy'$.

- a) Determine la solución general de $(D - 1) \circ (xD + 3)y = 0$. Ind.: Transforme la ecuación en dos, considerando $(xD + 3)y = z$ y $(D - 1)z = 0$.
- b) Determine la solución general de $(D - 1) \circ (xD + 3)y = e^x$.

P12. Demuestre que las funciones $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, xe^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_3 x}$ son linealmente independientes si todos los coeficientes λ_i son distintos.

P13. Considere el siguiente problema de segundo orden con condiciones de borde

$$(*) \begin{cases} (1) & \text{Encontrar } y \text{ no nula y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tales que:} \\ (2) & y'' + \lambda y = 0. \\ (3) & y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

- a) Encuentre la solución general de (2) en los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.
- b) Si $\lambda \leq 0$, demuestre que las condiciones (1) y (3) no pueden satisfacerse para ninguna solución particular de (2).
- c) Si $\lambda > 0$, demuestre que las condiciones (1) y (3) sí pueden satisfacerse para alguna solución particular de (2), siempre que λ tome los valores de una sucesión (λ_n) tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$. Determine tal sucesión.
- d) Más generalmente, multiplicando (2) por $y(t)$ e integrando entre los valores $t = 0$ y $t = \pi$, demuestre que λ es necesariamente positivo si:

$$y \neq \text{cte.} \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} y(0) & y'(\pi) \\ y(\pi) & y'(0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

P14. Para p, q funciones continuas en un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$, considere la EDO de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (*)$$

Sean y, z soluciones linealmente independientes de (*) en $\mathcal{C}^2(I)$. Considere $a, b \in I$, con $a < b$ de modo que $y(a) = y(b) = 0$ pero $y(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, es decir, a y b son ceros consecutivos de y .

Ind.: A lo largo del problema, puede ser útil el teorema del valor intermedio: Para una función real f continua en $[x_1, x_2]$ tal que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen distinto signo, existe un $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x^*) = 0$.

- a) Definamos $W(x) := W(y(x), z(x))$ el Wronskiano asociado. Muestre que la función $W(x)$ nunca es cero y tiene el mismo signo para todo $x \in I$. Encuentre además expresiones para $W(a)$ y $W(b)$.
- b) Muestre que $y'(a)$ y $y'(b)$ son reales no nulos y tienen distinto signo.
Ind.: Para ver los signos de $y'(a)$ y $y'(b)$, muestre primero que $y(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \in]a, b[$ y después analice los límites laterales $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$ y $\lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{y(b+k) - y(b)}{k}$.
- c) Muestre que $z(a)$ y $z(b)$ no son nulas y tienen distinto signo. Concluya que existe un único $c \in]a, b[$ de modo que $z(c) = 0$.

P15. Considere la ecuación a coeficientes constantes de la forma

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f$$

donde $f = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ es un polinomio de grado $m \geq 0$. Demuestre que si $a_0 \neq 0$ entonces esta ecuación tiene una solución particular de la forma $\sum_{k=0}^m B_k x^k$, con B_k constantes.