MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Profesora: Salomé Martínez.

Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro.

Pauta Auxiliar Extra C1 P2b,c-P3

P2. Cambio de Variable. (P12 Guía)

(a) Considere la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0,$$

donde F es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = y/x$, desarrolle un método general para resolver esta ecuación y aplíquelo a:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

(b) Considere ahora la ecuación:

$$y' = G\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right), \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

donde G es una función continua. Demuestre que si $ad - bc \neq 0$, entonces esta ecuación puede llevarse a la forma del ítem (a) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, con α y β constantes adecuadas. ¿Cuál es el significado geométrico de este cambio? Aplique el método a:

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}.$$

Pauta: Queremos buscar α, β tales que el cambio de variable $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, convierta

$$y' = G\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right)$$

en

$$z' = G\left(\frac{at + bz}{ct + dz}\right).$$

Veamos cómo deben ser α y β si aplicamos el cambio de variable:

$$y' = G\left(\frac{a(t + \beta) + b(z + \alpha) + e}{c(t + \beta) + d(z + \alpha) + f}\right)$$

y como $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$ y como $dx = dt$ tenemos $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx}$, con lo que lo anterior queda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} = z' = G\left(\frac{a(t + \beta) + b(z + \alpha) + e}{c(t + \beta) + d(z + \alpha) + f}\right) = G\left(\frac{(at + bz) + (a\beta + b\alpha + e)}{(ct + dz) + (c\beta + d\alpha + f)}\right)$$

Ahora vamos a imponer

$$\frac{(at + bz) + (a\beta + b\alpha + e)}{(ct + dz) + (c\beta + d\alpha + f)} \stackrel{!}{=} \frac{at + bz}{ct + dz}$$

para que nos quede con la misma estructura de la parte a).

Esto nos dice que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a\beta + b\alpha + e &= 0 \\ c\beta + d\alpha + f &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se desprende que

$$\alpha = \frac{af - ce}{bc - ad}$$

$$\beta = \frac{bf - de}{ad - bc}$$

Que como vemos el sistema solo tiene solución si $ad - bc \neq 0$.

El elegir estos valores de α y β nos hace terminar con la EDO

$$z' = G\left(\frac{at + bz}{ct + dz}\right)$$

Que es lo que queríamos. Apliquemos ahora este método a

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$$

En este caso $a = b = c = 1$, $d = -1$, $e = 4$, $f = -6$. Sabiendo esto calculamos α y β :

$$\alpha = \frac{af - ce}{bc - ad} = \frac{-6 - 4}{1 + 1} = -5$$

$$\beta = \frac{bf - de}{ad - bc} = \frac{-6 + 4}{-1 - 1} = 1$$

Así el cambio de variable nos deja la siguiente EDO:

$$z' = \frac{(t + 1) + (z - 5) + 4}{(t + 1) - (z - 5) - 6} = \frac{t + z}{t - z}$$

Que es la misma del ítem a).

El significado geométrico de este cambio de variable es que en verdad estamos trasladando nuestro sistema de referencia para que esté centrado donde se interseccionan las rectas

$$ax + by + e = 0$$

$$cx + dy + f = 0$$

(c) Analice el caso $ad - bc = 0$. Proponga un método de resolución en este caso.

Pauta: Ahora como $ad - bc = 0$ las rectas serán paralelas y el método anterior no sirve, por lo que hay que proponer un método alternativo.

Notamos que si $ad - bc = 0$, entonces $c = \frac{ad}{b}$. Llamando $k = \frac{d}{b}$ tenemos que $c = ak$, $d = bk$.

Luego la EDO queda

$$y' = G\left(\frac{ax + by + e}{akx + bky + f}\right) = G\left(\frac{ax + by + e}{k(ax + by) + f}\right)$$

Por lo que vamos a sugerir el cambio de variable $u = ax + by$. Su derivada sería $u' = a + by'$, lo que implica que $y' = \frac{u' - a}{b}$. Reemplazando todo esto en la EDO tenemos:

$$\frac{u' - a}{b} = G\left(\frac{u + e}{ku + f}\right)$$

Reescribiéndolo

$$u' = bG\left(\frac{u + e}{ku + f}\right) + a$$

Que es una EDO a variable separables

$$\frac{u'}{bG\left(\frac{u + e}{ku + f}\right) + a} = 1$$

$$\int \frac{du}{bG\left(\frac{u + e}{ku + f}\right) + a} = \int dx = x + C$$

Con lo que queda encontrado un método de resolución alterno.

P3. Teorema de Existencia y Unicidad.

Considere el siguiente problema de Cauchy (PC1):

$$\sqrt[3]{1+x^2+2xy^3+y^6} - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad y(x_0) = y_0.$$

- (a) Usando el cambio de variable $z = x + y^3$, transforme este problema en un nuevo problema de Cauchy (PC2):

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z), \quad z(x_0) = z_0,$$

especificando f , x_0 y z_0 .

Pauta: Primero notamos que si $z = x + y^3$ entonces $z_0 = z(x_0) = x_0 + y_0^3$. Teniendo eso listo, reemplacemos el cambio de variable en la EDO.

Nos damos cuenta de que $z^2 = (x + y^3)^2 = x^2 + 2xy^3 + y^6$. También vemos que $\frac{dz}{dx} = 1 + 3y^2 \frac{dy}{dx}$. Así la EDO nos queda:

$$\sqrt[3]{1+z^2} = \frac{dz}{dx}$$

De esta manera tenemos que $f(x, z) = \sqrt[3]{1+z^2}$.

- (b) Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad, encuentre todos los valores de $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$ tales que exista una única solución global de (PC2), es decir, definida en todo $\mathbb{R}$.

Pauta: Para aplicar TEU queremos ver que $f(x, z)$ sea Lipschitz respecto a z y continua respecto a x . Queremos ver qué tan grande puede ser el dominio donde estas condiciones se cumplen, ya que esto nos dirá todos los valores posibles que pueden tomar x_0 y z_0 .

Notamos que f está bien definida en todo $\mathbb{R}^2$, además es continua por álgebra y composición de funciones continuas respecto a x y z (en particular es constante respecto a x).

Veamos que también es Lipschitz respecto a z . En particular queremos acotar $\forall z_1, z_2$

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

Pero no es fácil pensar en una cota para $\sqrt[3]{1+z^2}$, por lo que nos aprovechamos del Teorema del Valor Medio.

Primero vemos que f aparte de ser continua en todo $\mathbb{R}$ respecto a z es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ respecto a z :

$$\frac{df}{dz} = \frac{2z}{3(1+z^2)^{2/3}}$$

Entonces por el TVM tenemos que existe algún $c \in (z_1, z_2)$ (asumimos $z_1 < z_2$ spg) tal que

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| = f'(c)|z_1 - z_2|$$

Pero esta cota depende de z_1 y z_2 . Si logramos que sea independiente de los z que elegimos entonces demostraremos que es Lipschitz. En ese caso bastaría ver que la derivada de f es acotada. Este resulta ser el caso, pues

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{2z}{3(1+z^2)^{2/3}} = 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{2z}{3(1+z^2)^{2/3}}$$

Como es continua en todo $\mathbb{R}$ y ambos límites tienden a cero, tiene que ser acotada, es decir, existe un $L > 0$ tal que $f'(c) < L$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Luego tenemos

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| = f'(c)|z_1 - z_2| \leq L|z_1 - z_2|$$

y por lo tanto es Lipschitz. Como todo lo que hicimos se cumple para cualquier valor de x y z en $\mathbb{R}$ tenemos que por TEU existe una solución única al problema de valor inicial para cualquier x_0 y z_0 .

- (c) Muestre que para todo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, existe una función continua $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciable en $A = \{x \in \mathbb{R} : y(x) \neq 0\}$, y que resuelve (PC1) en A .

Pauta: Como usamos el TEU para (PC2) esto debería implicar un resultado similar para (PC1), al menos en términos de existencia.

Tenemos que como $z = x + y^3$ entonces proponemos $y = (z - x)^{1/3}$. Derivando: $y' = \frac{z' - 1}{3(z-x)^{2/3}}$.

Luego $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y además es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$ excepto cuando el denominador se hace cero, es decir, cuando $z = x$, lo que implica que $x + y^3 = x \implies y = 0$. Es decir, es continuamente diferenciable en A .

Además en A , $y = (z - x)^{1/3}$ resuelve el (PC1) pues lo satisface (ya que z satisface (PC2)) y cumple que $y(x_0) = (z(x_0) - x_0)^{1/3} = (x_0 + y_0^3 - x_0)^{1/3} = y_0$.