**MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**
**Profesora: Salomé Martínez.**
**Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro.**

# Auxiliar Extra C1

**P1. Modelamiento – Tanque Vertical y Ley de Torricelli.**

La velocidad de salida del agua a través de un orificio en el fondo de un tanque lleno hasta una altura $h(t)$, es igual a la velocidad de un objeto que cae libremente desde la misma altura:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)},$$

donde:

- $v(t)$: velocidad de salida del agua en el tiempo $t$.
- $h(t)$: altura del agua en el tanque en el tiempo $t$.
- $g$: aceleración de gravedad.

El objetivo de esta pregunta es relacionar la disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida y elaborar un modelo con EDO's.

**Propuesto:** ¿Cómo sería el modelo si el tanque estuviera dispuesto de forma horizontal?

**P2. Cambio de Variable.** (P12 Guía)

(a) Considere la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0,$$

donde $F$ es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = y/x$, desarrolle un método general para resolver esta ecuación y aplíquelo a:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

(b) Considere ahora la ecuación:

$$y' = G\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right), \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

donde $G$ es una función continua. Demuestre que si $ad - bc \neq 0$, entonces esta ecuación puede llevarse a la forma del ítem (a) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, con $\alpha$ y $\beta$ constantes adecuadas. ¿Cuál es el significado geométrico de este cambio? Aplique el método a:

$$y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}.$$

(c) Analice el caso $ad - bc = 0$. Proponga un método de resolución en este caso.

**P3. Teorema de Existencia y Unicidad.**

Considere el siguiente problema de Cauchy (PC1):

$$\sqrt[3]{1 + x^2 + 2xy^3 + y^6} - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad y(x_0) = y_0.$$

(a) Usando el cambio de variable $z = x + y^3$, transforme este problema en un nuevo problema de Cauchy (PC2):

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z), \quad z(x_0) = z_0,$$

especificando $f$, $x_0$ y $z_0$.

(b) Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad, encuentre todos los valores de $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$ tales que exista una única solución global de (PC2), es decir, definida en todo $\mathbb{R}$.

(c) Muestre que para todo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, existe una función continua $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuamente diferenciable en $A = \{x \in \mathbb{R} : y(x) \neq 0\}$, y que resuelve (PC1) en $A$.

# Resumen

| **EDO** | **Forma general** | **Paso clave/Cambio de variable** |
|---|---|---|
| Integración directa | $y' = f(x)$ | $y = \int f(x)dx + C$, $C \in \mathbb{R}$ |
| Variables separables | $y' = f(x)g(y)$ | Sols. constantes y $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ |
| Lineal homogénea | $y' + a(x)y = 0$ | Var. separables con $f(x) = -a(x)$, $g(y) = y$ |
| Lineal no homogénea | $y' + a(x)y = q(x)$, $q \neq 0$ | Factor integrante: $\exp\left(\int a(x)dx\right)$ |
| Homogénea | $y' = h(y/x)$ | $z(x) = y(x)/x$ |
| Riccati | $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ | $y_1$ sol. $\to y(x) = y_1(x) + 1/z(x)$ |
| Bernoulli | $y' + a(x)y = q(x)y^n$, $n \neq 0, 1$ | $z(x) = y(x)^{1-n}$ |

Cuadro 1: Tabla útil con los tipos de EDO que entran en el C1, su forma y paso clave de resolución. **No es necesario aprendérselas**, pero es útil conocerlas.

## Observaciones

- Para resolver una ecuación de variables separables, primero hay que encontrar todas las soluciones constantes, es decir, aquellas en que $y' = 0$, con lo que $g(y) = 0$. Luego, podemos proceder como aparece en la tabla.
- El factor integrante requiere solo una primitiva de $a(\cdot)$, esto quiere decir que no es necesario considerar constantes arbitrarias o signos asociados a valores absolutos.
- La solución $y_1$ de la ecuación de Riccati debe ser conocida de antemano. Esta se puede obtener buscando funciones que tengan una forma simple.

# TEU

**Lipschitz**

Una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice **globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable** (o que satisface una condición uniforme de Lipschitz de primer orden en su segunda variable) en el conjunto $A$ si existe una constante $L > 0$ tal que $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in A$ se cumpla que:

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

**Teorema de Existencia y Unicidad Global, para ecuaciones de orden 1.**

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y' = F(x, y)$, con $F : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos, tal que $F$ sea globalmente Lipschitz respecto a $y$, continua respecto a $x$, y sea $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$. Entonces, el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una y solo una solución $y : I_1 \to \mathbb{R}$.