

Pauta Auxiliar 2
Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berrios y Francisco Castro

P1. El desarrollo de una economía en el tiempo se puede modelar por la ecuación:

$$y' = te^{-\lambda t}y$$

donde $y(t)$ representa la magnitud de la economía en el tiempo t .

a) Calcule la solución en función del valor inicial $y(0) = y_0$.

Pauta: Ignorando el caso $y = 0$ (solución trivial si $y_0 = 0$) reescribimos la EDO:

$$\frac{y'}{y} = te^{-\lambda t}$$

Es una EDO a variables separables, por lo que la podemos resolver simplemente integrando.

$$\int_0^t \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int_0^t xe^{-\lambda x} dx$$

Haciendo el cambio de variable $z = y(x)$ nos queda:

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dz}{z} = \int_0^t xe^{-\lambda x} dx \quad (1)$$

La integral de la derecha puede resolverse usando integración por partes.

$$\begin{aligned} \int_0^t xe^{-\lambda x} dx &= \left. \frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} \right|_0^t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \left. \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \left(x + \frac{1}{\lambda}\right) \right|_0^t \\ &= \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Por lo que (1) nos queda:

$$\begin{aligned} \ln |y| - \ln |y_0| &= \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right) \\ \iff \ln |y| &= \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right) + \ln |y_0| \end{aligned}$$

Luego aplicando la exponencial nos queda:

$$|y(t)| = |y_0| \exp \left(\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right) \right)$$

Donde el signo de y vendrá dado por y_0 :

$$y(t) = y_0 \exp \left(\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right) \right)$$

- b) Encuentre el valor de λ para que el crecimiento límite de esta economía alcance el doble de su valor inicial.

Pauta: Primero notamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 \exp \left(\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \right) \right) = y_0 \exp \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Luego lo que nos piden será encontrar el λ tal que

$$y_0 \exp \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = 2y_0$$

lo que resulta en

$$\frac{1}{\lambda^2} = \ln 2 \iff |\lambda| = \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$$

P2. Identifique por inspección una solución particular de la ecuación

$$x^3 \frac{dy}{dx} + x^2 y - y^2 = 2x^4$$

y encuentre la solución tal que $y(1) = 4$.

Pauta: La EDO es reescrita para despejar y' :

$$y' + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} = 2x$$

Por inspección notamos que $y(x) = x^2$ es solución:

$$(x^2)' + \frac{x^2}{x} - \frac{(x^2)^2}{x^3} = 2x + x - x = 2x$$

Luego como es una EDO de Riccati y ya tenemos una solución particular, hacemos el cambio de variable $y(x) = x^2 + \frac{1}{z(x)}$.

Reemplazando en la EDO tenemos:

$$\left(x^2 + \frac{1}{z(x)} \right)' + \frac{x^2 + \frac{1}{z(x)}}{x} - \frac{\left(x^2 + \frac{1}{z(x)} \right)^2}{x^3} = 2x$$

$$\cancel{2x} - \frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z \cdot x} - \frac{x^4 + \frac{2x^2}{z} + \frac{1}{z^2}}{x^3} = \cancel{2x}$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \cancel{x} + \frac{1}{zx} - \cancel{x} - \frac{2}{zx} - \frac{1}{z^2 x^3} = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{zx} - \frac{1}{z^2 x^3} = 0$$

$$z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^3}$$

Esta es una EDO lineal no homogénea y como es costumbre la resolvemos con factor integrante que en este caso será $e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$.

Multiplicando entonces por x :

$$z'x + z = -\frac{1}{x^2}$$

$$(zx)' = -\frac{1}{x^2}$$

Integramos a ambos lados

$$zx = - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$$
$$z = \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}$$

Luego volviendo a y :

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{z(x)} = x^2 + \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x}} = x^2 + \frac{x^2}{1 + Cx}$$

Evaluable en $x = 1$:

$$y(1) = 4 = 1 + \frac{1}{1 + C} \implies \frac{1}{3} = 1 + C \implies C = -\frac{2}{3}$$

Así la solución final es

$$y(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 - \frac{2}{3}x}$$

P3. Un paracaidista de masa $m > 0$ se lanza desde un avión y abre su paracaídas. La fuerza de fricción que frena al paracaidista es proporcional al cuadrado de la velocidad con que cae, con una constante de proporcionalidad $k > 0$. Sea $g > 0$ la aceleración de gravedad.

a) Si $v(t)$ representa la velocidad con que cae el paracaidista, considerando el sentido de caída como positivo, explique por qué v verifica la ecuación diferencial

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k[v(t)]^2$$

Pauta: La segunda ley de Newton nos dice que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración. Como sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad, tenemos que:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_i F_i$$

En este caso las únicas fuerzas que están actuando sobre el cuerpo son el peso y la fricción, la cual nos dicen que es proporcional al cuadrado de la velocidad con una constante de proporcionalidad k , es decir, la suma de las fuerzas queda como:

$$\sum_i F_i = mg - k \cdot v(t)^2$$

Donde el signo de la fuerza de fricción es negativo pues se opone al movimiento (sentido de caída positivo).

Con esto se concluye lo que nos pedían:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k[v(t)]^2$$

b) Defina

$$\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Verifique que $v_1(t) = \alpha$ es una solución particular de la ecuación. Use dicha información para calcular la solución general con la condición inicial $v(0) = v_0 \geq 0$.

Indicación: Expresar la solución en función del parámetro α .

Pauta: Veamos que $v_1(t) = \alpha$ es solución. Reemplazando en la EDO tenemos:

$$m \cdot 0 = mg - k \cdot \alpha^2$$

$$0 = mg - k \cdot \frac{mg}{k} = 0$$

Se confirma que es solución.

Notamos que es una EDO de Riccati y como tenemos una solución particular, podemos aplicar el cambio de variable $v(t) = v_1 + \frac{1}{z}$.

Haciendo esto la EDO queda:

$$m \cdot \left(-\frac{z'}{z^2}\right) = mg - k \cdot \left(v_1 + \frac{1}{z}\right)^2$$

Desarrollando:

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{k}{m} \cdot \left(v_1^2 + 2\frac{v_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - g$$

Multiplicando por z^2 :

$$z' = \frac{k}{m} \cdot (v_1^2 z^2 + 2v_1 z + 1) - g z^2$$

$$z' = \frac{k}{m} v_1^2 z^2 + 2\frac{k}{m} v_1 z + \frac{k}{m} - g z^2$$

Nos queda:

$$z' - 2\frac{k}{m} v_1 z = \frac{k}{m}$$

Esta es una EDO lineal no homogénea y la podemos resolver usando factor integrante.

El factor integrante será $e^{-\frac{2kv_1}{m}t}$, aplicándolo a nuestra EDO tenemos:

$$z' e^{-\frac{2kv_1}{m}t} - 2\frac{k}{m} v_1 z e^{-\frac{2kv_1}{m}t} = \frac{k}{m} e^{-\frac{2kv_1}{m}t}$$

Lo que es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(z e^{-\frac{2kv_1}{m}t}) = \frac{k}{m} e^{-\frac{2kv_1}{m}t}$$

Integrando:

$$z e^{-\frac{2kv_1}{m}t} = \frac{k}{m} e^{-\frac{2kv_1}{m}t} \cdot \frac{-m}{2kv_1} + C$$

Despejando z :

$$z(t) = -\frac{1}{2v_1} + C e^{\frac{2kv_1}{m}t}$$

Volviendo a v tenemos:

$$v(t) = v_1 + \frac{1}{z(t)} = v_1 + \frac{1}{-\frac{1}{2v_1} + C e^{\frac{2kv_1}{m}t}}$$

Despejemos la constante C evaluando en $t = 0$:

$$v(0) = v_1 + \frac{1}{-\frac{1}{2v_1} + C} = v_0$$

Luego

$$\frac{1}{-\frac{1}{2v_1} + C} = v_0 - v_1 \implies C = \frac{1}{v_0 - v_1} + \frac{1}{2v_1}$$

Por lo que al forma general de $v(t)$ es:

$$v(t) = v_1 + \frac{1}{-\frac{1}{2v_1} + (\frac{1}{v_0 - v_1} + \frac{1}{2v_1})e^{\frac{2kv_1}{m}t}} = v_1 - \frac{2v_1(v_0 - v_1)}{v_0 - v_1 - (v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}}$$

c) Asuma que $v_0 > \alpha$. Verifique que $v(t)$ es decreciente y que $v(t) \in (\alpha, v_0]$.

Pauta: Como $e^{\frac{2kv_1}{m}t}$ es creciente, entonces $-(v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}$ será decreciente, ya que lo estamos multiplicando por algo negativo. Luego $v_0 - v_1 - (v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}$ será decreciente. Después, tenemos que su inversa tiene que ser creciente, por lo que $\frac{2v_1(v_0 - v_1)}{v_0 - v_1 - (v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}}$ será creciente (recordar que $(v_0 - v_1) > 0$). Por último el multiplicar esto por -1 hace que la función ahora sea decreciente, es decir, tenemos que $v_1 - \frac{2v_1(v_0 - v_1)}{v_0 - v_1 - (v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}}$ es efectivamente una función decreciente.

Ahora para verificar que $v(t) \in (\alpha, v_0]$ basta tomar el límite de la función:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1 - \frac{2v_1(v_0 - v_1)}{v_0 - v_1 - (v_1 + v_0)e^{\frac{2kv_1}{m}t}} = v_1 = \alpha$$

Es decir, el menor valor que puede alcanzar $v(t)$ es α , pues es decreciente. Esto sumado a que en $t = 0$ su valor es v_0 (mayor valor posible, pues como ya dijimos es decreciente) nos da que $v(t) \in (\alpha, v_0]$.

P4. Sea $a, b \neq 0$. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b}x^2q(x) - xp(x) - 1 \right)$$

a) Muestre que el cambio de variables $z = ax + by$ convierte la ecuación en una ecuación de Bernoulli.

Pauta: Este cambio de variable implica que

$$y = \frac{z}{b} - \frac{ax}{b}$$

$$y' = \frac{z'}{b} - \frac{a}{b}$$

Reemplazando esto en la EDO

$$\begin{aligned} \left(\frac{z'}{b} - \frac{a}{b}\right) + p(x)\left(\frac{z}{b} - \frac{ax}{b}\right) + q(x)\left(\frac{z}{b} - \frac{ax}{b}\right)^2 &= \frac{a^2}{b^2}x^2q(x) - \frac{a}{b}xp(x) - \frac{a}{b} \\ \frac{z'}{b} + p(x)\frac{z}{b} - \cancel{p(x)\frac{ax}{b}} + q(x)\left(\frac{z^2}{b^2} - \frac{2zax}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^2}\right) &= \frac{a^2}{b^2}x^2q(x) - \frac{a}{b}xp(x) \\ z' + p(x)z + q(x)\left(\frac{z^2}{b} - \frac{2zax}{b}\right) &= 0 \\ z' + z\left(p(x) - q(x)\frac{2ax}{b}\right) &= -q(x)\frac{z^2}{b} \end{aligned}$$

Que es una EDO de Bernoulli con $n = 2$.

b) Use lo anterior para resolver la ecuación:

$$y' + (3x - 2x^3)y + (1 - x^2)y^2 = x^4 - 2x^2 - 1$$

Pauta: Notamos que este es un caso particular de la EDO de la parte a) con $p(x) = 3x - 2x^3$ y $q(x) = 1 - x^2$. También notamos que

$$x^2q(x) - xp(x) - 1 = x^2(1 - x^2) - x(3x - 2x^3) - 1 = x^2 - x^4 - 3x^2 + 2x^4 - 1 = x^4 - 2x^2 - 1$$

Que es lo que está al lado derecho de la EDO y nos indica que para este caso $a = b = 1$ (en realidad usar $a = b$ es suficiente, pero tomarlo como 1 simplifica el problema).

Luego el cambio de variable es $z = x + y$ y por la parte anterior esto conducirá a la siguiente EDO.

$$z' + z((3x - 2x^3) - 2x(1 - x^2)) = -(1 - x^2)z^2$$

Lo que se simplifica a

$$z' + zx = (x^2 - 1)z^2$$

Luego como esta es una EDO de Bernoulli hacemos el cambio de variable $u = z^{1-2} = \frac{1}{z}$, con $u' = -\frac{z'}{z^2}$.

Multiplicando la EDO por $-\frac{1}{z^2}$:

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{x}{z} = -(x^2 - 1)$$

$$u' - xu = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$$

Usando factor integrante $e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ tenemos:

$$u'e^{-\frac{x^2}{2}} - xue^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$(ue^{-\frac{x^2}{2}})' = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Integrando

$$ue^{-\frac{x^2}{2}} = \int (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = xe^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

Lo que nos lleva a

$$u(x) = x + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Con lo que podemos recuperar $z(x)$:

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + Ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

Lo que nos permite recuperar y :

$$y = z - x = \frac{1}{x + Ce^{\frac{x^2}{2}}} - x$$

Con lo que queda resuelta la EDO.