Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 2: Riccati, Bernoulli y Modelamiento

Profesora: Salomé Martínez
Auxiliares: Antonia Berríos y Francisco Castro

Resumen

- **[Ecuaciones Homogéneas]:** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que f es k-homogénea si para todo $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \pm\lambda^k f(x, y)$$

Si para la EDO $y'(x) = \frac{f(x,y(x))}{g(x,y(x))}$ se da que f, g son k-homogéneas entonces se puede transformar en la EDO a

$$\boldsymbol{y'(x) = h\left(\frac{y(x)}{x}\right)}$$

con $h(z)$ a determinar, y con un cambio de variables de $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ se llega a

$$\int \frac{dz}{h(z) - z} = \ln(x) + C$$

- **[Bernoulli]:** La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$$

Se realiza el **cambio de variable** $\boldsymbol{z = y^{1-n}}$.
Que nos deja con

$$z' + p(x)(1 - n)z = (1 - n)q(x),$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.

- **[Riccati]:** La ecuación de Riccati es de la forma

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Se realiza el **cambio de variable** $\boldsymbol{y = y_1 + \frac{1}{z}}$, donde y_1 es alguna solución conocida (por ejemplo fácil de calcular) de la EDO anterior.

P1. El desarrollo de una economía en el tiempo se puede modelar por la ecuación:

$$y' = te^{-\lambda t}y$$

donde $y(t)$ representa la magnitud de la economía en el tiempo t.

a) Calcule la solución en función del valor inicial $y(0) = y_0$.

b) Encuentre el valor de λ para que el crecimiento límite de esta economía alcance el doble de su valor inicial.

P2. Identifique por inspección una solución particular de la ecuación

$$x^3\frac{dy}{dx} + x^2y - y^2 = 2x^4$$

y encuentre la solución tal que $y(1) = 4$.

P3. Un paracaidista de masa $m > 0$ se lanza desde un avión y abre su paracaídas. La fuerza de fricción que frena al paracaidista es proporcional al cuadrado de la velocidad con que cae, con una constante de proporcionalidad $k > 0$. Sea $g > 0$ la aceleración de gravedad.

a) Si $v(t)$ representa la velocidad con que cae el paracaidista, considerando el sentido de caída como positivo, explique por qué v verifica la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k[v(t)]^2$$

b) Defina

$$\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Verifique que $v_1(t) = \alpha$ es una solución particular de la ecuación. Use dicha información para calcular la solución general con la condición inicial $v(0) = v_0 \geq 0$.

Indicación: Exprese la solución en función del parámetro α.

c) Asuma que $v_0 > \alpha$. Verifique que $v(t)$ es decreciente y que $v(t) \in (\alpha, v_0]$.

P4. Sea $a, b \neq 0$. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}x^2 q(x) - xp(x) - 1\right)$$

a) Muestre que el cambio de variables $z = ax + by$ convierte la ecuación en una ecuación de Bernoulli.

b) Use lo anterior para resolver la ecuación:

$$y' + (3x - 2x^3)y + (1 - x^2)y^2 = x^4 - 2x^2 - 1$$