P4

Queremos resolver la ec de Schrodinger para una partícula libre. Para ello usaremos TF:

$$(P) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx}(x,t) = i\hbar\,\Psi_t(x,t) \\ \Psi(x,0) = \Psi_0(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicamos TF c/r a x:

$$-\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m}\Psi_{xx} = i\cancel{\hbar}\,\Psi_t$$

$$\mathcal{F}[\,](k)\Big\downarrow$$

$$-\frac{\hbar}{2m}(ik)^2\hat{\Psi} = i\,\hat{\Psi}_t$$

$$\hat{\Psi}' = \frac{\hbar k^2}{2mi}\hat{\Psi} \quad \text{/EDO r/a t}$$

resolviendola

$$\Rightarrow \hat{\Psi}(k,t) = Ae^{\hbar t/2mi\, k^2}$$

Ahora aplicando TF a la CI:

$$\hat{\Psi}(k,0) = \hat{\Psi}_0(k)$$

$$\Rightarrow \quad A = \hat{\Psi}_0(k)$$

Por lo tanto:

$$\hat{\Psi}(k,t) = \hat{\Psi}_0(k)\,e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2} \quad / \quad \frac{\hbar t}{2mi} = -i\frac{\hbar t}{2m}$$

Y la solución se obtiene aplicando anti TF:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Psi}_0(k)\,e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2}e^{ikx}\,dk$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Psi}_0(k)\,e^{i(kx - \frac{\hbar t}{2m}k^2)}\,dk}$$

b) Ahora bien, si $\Psi_0(x) \propto e^{-\pi x^2} \Rightarrow \Psi_0(x) = Ae^{-\pi x^2}$. Por otra parte

proporcional

se sabe que la TF de una gaussiana es otra gaussiana, con desviación estandar inversa:

$$\hat{\Psi}_0(k) = \widehat{Ae^{-\pi x^2}}(k)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{4\pi}}$$

ver aux 10 P1a), TF conocida

Y para que cumpla condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0|^2 dx = A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x^2} dx}_{\sqrt{2}} = 1 \quad / \; \Psi_0 = A e^{-\pi x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}}$$

Y la solución es:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4\pi} e^{i\left(kx - \frac{\hbar t}{2m}k^2\right)} dk$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4\pi} + i\frac{\hbar^2 t}{2m}k^2 + ikx} dk$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overbrace{\left(\frac{1}{4\pi} - i\frac{\hbar^2 t}{2m}\right)}^{\alpha}k^2 + ikx} dk$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\underbrace{\alpha k^2 - ikx + \left(\frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}_{=\left(\sqrt{\alpha}k - \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} - \left(\frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)} dk$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} e^{-\left(\sqrt{\alpha}k - \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dk$$

no depende de k, sale de la integral

$u = \sqrt{\alpha}k - \frac{ix}{2\sqrt{\alpha}}$

$du = \sqrt{\alpha}\, dk$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}}}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{2\cancel{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{\alpha}}$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} e^{-x^2/4\left(\frac{1}{4\pi} - i\frac{\hbar^2 t}{2m}\right)} \left(\frac{1}{4\pi} - i\frac{\hbar^2 t}{2m}\right)^{-1/2}}$$

P_2

$$(*) \begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{1}{1+t}u = 0, & x \in (0,2);\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a) Aplicando separación de variables $u(x,t) = M(x)N(t)$ sobre la ecuación se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{1+t}\right) M(x)N(t) = 0$$

$$\Rightarrow MN' - M''N + \frac{1}{1+t}MN = 0$$

$\cdot \frac{1}{MN}$

$$\frac{N'}{N} - \frac{M''}{M} + \frac{1}{1+t} = 0$$

$+\frac{M''}{M}$

$$\underbrace{\frac{N'}{N} + \frac{1}{1+t}}_{\text{sólo depende de } t} = \underbrace{\frac{M''}{M}}_{\text{sólo depende de } x} = -\lambda \quad \text{cte}$$

va para que calce con lo que hay que llegar

Por lo tanto:

$$\frac{M''}{M} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{M''(x) + \lambda M(x) = 0}$$

Aplicando la separación de variables en las CB:

$$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$M'(0)N(t) = M'(2)N(t) = 0$$

$\frac{1}{N(t)}$ se asume solución no trivial

$$M'(0) = M'(2) = 0$$

Llegando a lo pedido para M. Volviendo a la ecuación en donde se definió la cte de separación λ:

$$\frac{N'}{N} + \frac{1}{1+t} = -\lambda$$

$\cdot N$

$$\boxed{N'(t) + \left(\frac{1}{1+t} + \lambda\right)N(t) = 0}$$

b) Resolvamos primero la EDO para M:

$$M'' + \lambda M = 0$$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow M(x) = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x}$

$\lambda = 0 \Rightarrow M_0(x) = Ax + B$

Aplicando CB:

$\boxed{\lambda \neq 0}$

$$M'(0) = 0 \Rightarrow M'(0) = A\sqrt{\lambda}\, \cancel{e^{\sqrt{\lambda}0}}^{1} - B\sqrt{\lambda}\, \cancel{e^{\sqrt{\lambda}0}}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow A \cancel{\sqrt{\lambda}} = B \cancel{\sqrt{\lambda}} \;/\; \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = A\left(e^{\sqrt{\lambda} x} + e^{-\sqrt{\lambda} x}\right)}$$

$$M'(2) = 0 \Rightarrow M'(2) = A\left(\cancel{\sqrt{\lambda}} e^{2\sqrt{\lambda}} - \cancel{\sqrt{\lambda}} e^{-2\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{A = 0}_{\text{llera a sol trivial igual a cero, se descarta}} \vee \underbrace{e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}} = 0}_{\text{lo cual es sólo posible para } \lambda > 0 \wedge \cancel{\lambda = 0}}$$

ya que partimos asumiendo que $\lambda \neq 0$

$$\Rightarrow e^{i2\sqrt{\lambda}} - e^{-i2\sqrt{\lambda}} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2i}$$

$$\frac{e^{i2\sqrt{\lambda}} - e^{-i2\sqrt{\lambda}}}{2i} = 0$$

$$\sin(2\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\lambda_n} = n\pi \quad , \text{como } \lambda \neq 0 \ n \in \{1,2,3,\ldots\}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow M(x) = A\left(e^{i\frac{n\pi}{2}x} + e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\right)$$

$$= \frac{A_n}{2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$= \boxed{A_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$M_0'(0) = A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_0(x) = B = cte}$$

c) Resolvemos la EDO para t:

$$(2) \quad N'(t) + \left(\lambda + \frac{1}{1+t}\right) N(t) = 0$$

$\boxed{\lambda \neq 0}$

$$\int dt \left(\frac{N'(t)}{N(t)} = -\left(\lambda + \frac{1}{1+t}\right) \right.$$

$$\int \frac{dN}{dt} \frac{1}{N} dt = -\lambda \int dt - \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$\exp(\cdot) \left(\ln(N) = -\lambda t - \ln(1+t) \right.$$

$$N = e^{-\lambda t - \ln(1+t)}$$

$$= e^{-\lambda t} e^{-\ln(1+t)}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{1}{1+t}$$

$$\boxed{= e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} \frac{1}{1+t}} \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$N_0'(t) + \frac{1}{1+t} N(t) = 0$$

$$\boxed{N_0(t) = \frac{1}{1+t}} \quad / \text{ mismos pasos de antes sin considerar } \lambda$$

d) Por ppio de superposición (sumar las soluciones encontradas también es solución):

$$u(x,t) = M(x)N(t) = M_0(x) N_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} M(x) N(t)$$

$$\boxed{= \frac{A_0}{1+t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{1+t} e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}$$

Finalmente aplicamos la CI $u(x,0)$:

$$u(x,0) \overset{t=0}{=} A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (1,2) \end{cases}$$

Acá se puede aplicar tanto formula de serie de cosenos $\left(A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \right)$ como multiplicar e integrar (como hago en aux 11 P3).

$L = 2$ en este caso, largo del intervalo sobre el cual está definido x

sale de extender de forma par la condición inicial $u(x,0)$

Con la formula (en un control justifiquen que sale de la extensión par de la CI):

$$A_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int_0^2 u(x,0)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{u(x,0)}_{=1}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 \underbrace{u(x,0)}_{=0}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}} - \underbrace{\sin(0)}_{0}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$A_0 = \int_0^2 u(x,0)\,dx$$

$$= \int_0^1 dx$$

$$= \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{1+t} + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{1+t} e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}$$

P3

Se pide resolver la ec de ondas para $x \in \mathbb{R}$ con CI dada

por:

$$\boxed{(P) = \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}}$$

Aplicando TF cr/a x a la ec y considerando que $\widehat{\frac{\partial}{\partial x} f(x)}(s) = ik\, \hat{f}$

(acá se asume la notación que $\mathcal{F}[f(x)](k) = \hat{f}(k)$):

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

$\mathcal{F}[u(x)](k)$

no transforma en t

$$\hat{u}_{tt} = c^2 (ik)^2 \hat{u} \quad / \hat{u}(k,t)$$

Las derivadas parciales r/a t pasan a ser totales en el dominio de Fourier k ya que para efectos de la variable t, k es una cte más

sale por linealidad de TF

al derivar por prop de TF suelta estos terminos

$$\Rightarrow \underline{\hat{u}'' = -c^2 k^2 \hat{u}} \quad \text{EDO para } \hat{u}(k,t)$$

Es un oscilador armonico por lo que su solución es conocida e igual a:

$$\hat{u}(k,t) = A\cos(ckt) + B\sin(ckt) \quad (*)$$

Para hallar las ctes A y B (que en realidad no son ctes como vamos a ver ahora) aplicamos TF a las CI:

$$\mathcal{F}[\ ](k) \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases}$$

Evaluando para la expresión $\hat{u}(k,t)$ $(*)$:

$$\hat{u}(k,0) = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + \cancel{B\sin(0)} = \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \hat{f}(k)}$$

Ahora para la otra CI lo mismo:

$$\mathcal{F}[\ ](k) \begin{cases} u_t(x,0) = g(x) \\ \hat{u}_t(k,t) = \hat{g}(k) \end{cases}$$

Derivando r/a t $\hat{u}(k,t)$:

$$t=0 \; \begin{cases} \hat{u}_t(k,t) = -Ack\sin(ckt) + Bck\cos(ckt) \\ \hat{u}_t(k,0) = \cancel{-Ack\sin(0)} + Bck\underbrace{\cos(0)}_{1} = \hat{g}(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\hat{g}(k)}{ck}}$$

Por lo tanto la sol general de $\hat{u}(k,t)$ es:

$$\underline{\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(ckt) + \frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)}$$

Para obtener $u(x,t)$ simplemente aplicamos antitransformada:

$$u(x,t) = \left(\hat{u}(k,t)\right)^{\vee} = \underbrace{\left[\hat{f}(k)\cos(ckt)\right]^{\vee}}_{\alpha(x,t)} + \underbrace{\left[\frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)\right]^{\vee}}_{\beta(x,t)}$$

Calculemos $\alpha(x,t)$ y $\beta(x,t)$ separadamente:

$$\left[\hat{f}(k)\cos(c^2k^2t)\right]^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\cos(ckt)e^{ikx}\,dk \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\left(\frac{e^{ickt}+e^{-ickt}}{2}\right)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(ct+x)}\,dk}_{\substack{\text{def anti TF} \\ = f(x+ct)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x-ct)}\,dk}_{= f(x-ct)}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$ /solución de D'Alambert

Ahora resolvemos $\beta(x,t)$:

$$\beta(x,t) = \left[\frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(ckt)\right]^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ck}\,\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ikct}-e^{-ikct}}{i}\right)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)\underbrace{\frac{e^{ik(x+ct)}-e^{ik(x-ct)}}{ik}}_{= \int_{x-ct}^{x+ct}e^{iku}\,du}\,dk$$

parece trucazo pero vean lo que pasa

Fubini (se asume que integral converge es decir que $g \in L^2$ $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$)

$$= \frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k)\int_{x-ct}^{x+ct} e^{iku}\,du\,dk$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)e^{iku}dk}_{\text{anti TF de } \hat{g}(k) \text{ evaluada en } u}\Big)du$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,du$$

Por lo que la sol $u(x,t)$ es:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,du}$$