Auxiliar 13

Métodos de resolución de EDP's

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional para una particula libre con condición inicial

$$(P)\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx}(x,t) = i\hbar\psi_t(x,t) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Obtenga una solución general de la ecuación.

b) Considere por último que $\psi_0(x,t) \propto e^{-\pi x^2}$ y que $|\psi^2|$ mide la probabilidad de encontrar a la partícula, lo que implica que la solución debe cumplir la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Escriba la solución explicita de $\psi(x,t)$ en este caso.

Pregunta 2

Nos propondremos resolver la siguiente EDP

$$(*)\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{1}{1+t}u = 0, \quad x \in (0,2); t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) Pruebe que si u es solución no nula de (*) de la forma $u(x,t) = M(x)N(t)$ entonces M verifica

$$(1) = \begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M'(0) = M'(2) = 0 \end{cases}$$

Y que N verifica

$$(2) \quad N'(t) + \left(\lambda + \frac{1}{1+t}\right) N(t) = 0$$

donde λ es constante.

b) Pruebe que el problema (1) tiene soluciones no nulas cuando $\lambda = 0$ y $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$. Y que en dichos casos las soluciones son

$$M(x) = \text{cte}$$
$$M_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

respectivamente, donde $n \geq 1$ y A_n es constante.

c) Determine $N(t)$ para los valores de $\lambda = 0$ y λ_n del item anterior.
Indicación: Debe resolver un par de EDO's mediante separación de variables. No considere constantes a la hora de integrar, ya que se pueden agrupar en las constantes de la solución del item anterior.

d) Use los items anteriores para mostrar que la solución general de la ecuación diferencial parcial tiene la forma

$$u(x,t) = \frac{A_0}{1+t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{1+t} \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Finalmente use la la condición inicial $u(x,0)$ para determinar A_0 y A_n; y así hallar la solución explicíta con coeficientes determinados.

Pregunta 3

Resuelva, usando transformada de fourier la ecuación de ondas

$$(P) \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) & \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$