

Auxiliar 11

Transformada de Fourier

Profesor: Víctor Ramos

Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$

b) $g(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$

c) $h(x) = \frac{a}{a^2+x^2}$

d)

$$p(x) = \mathbb{1}_{[-b,b]} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-b, b] \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Pregunta 2

- a) Usando la definición de TF (y anti TF) demuestre la identidad de Plancherel (* representa conjugación y asuma que f y g son cuadrado integrables)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{g}^*(s) ds$$

- b) Con lo anterior demuestre la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

Pregunta 3

Sea una función $g(x)$ tal que $\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s)e^{-s^2}$. Demuestre que

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} dy.$$

Pregunta 4

Se define la ecuación diferencial de Airy como

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Pruebe que la función

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(kx + \frac{k^3}{3}\right) dk$$

es una solución de (1). Dicha función se conoce como función de Airy y aparece de forma natural en contextos simples de óptica y mecánica cuántica.

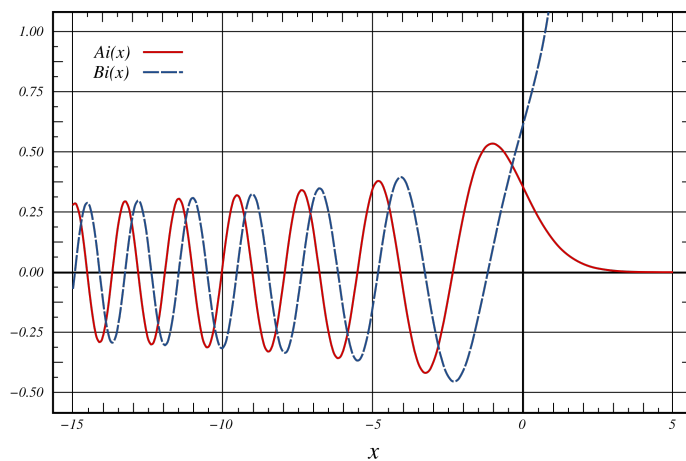


Figura 1: Gráficas de la función $\text{Ai}(x)$ y la otra solución linealmente independiente $\text{Bi}(x)$.

Transformada de Fourier

- Dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene que su Transformada y Antitransformada de Fourier son respectivamente

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(s) e^{isx} ds$$

Función	Transformada de Fourier
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$f^{(k)}(x)$	$(is)^k \hat{f}(s)$
$f(x - a)$	$e^{-ias} \hat{f}(s)$
$e^{iax} f(x)$	$\hat{f}(s - a)$
$f(ax); a \neq 0$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$
$e^{-ax^2}; a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
$\frac{a}{a^2 + x^2}; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a s }$
$\frac{a^3 - ax^2}{(a^2 + x^2)^2}; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} a s e^{-a s }$
$\begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{sino} \end{cases}; a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(as)}{s}$

Dualidad: Si $\hat{g}(s)$ es la transformada de Fourier de $g(x)$, entonces la transformada de Fourier de $\hat{g}(x)$ será una versión reflejada de $g(s)$, es decir:

$$\mathcal{F}\{\hat{g}(x)\} = g(-s).$$

En otras palabras, si

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx,$$

entonces

$$\mathcal{F}\{\hat{g}(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) e^{-isx} dx = g(-s).$$