

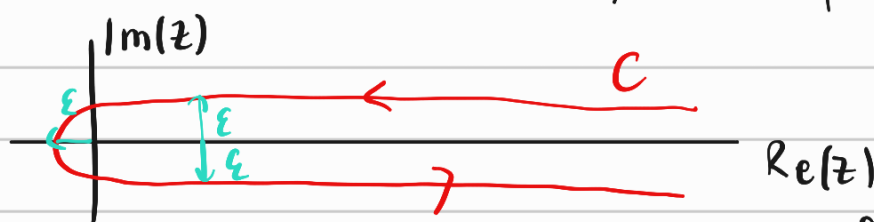
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

Una expresión alternativa y que extiende la definición de la función a casi todo el plano complejo es la sgte:

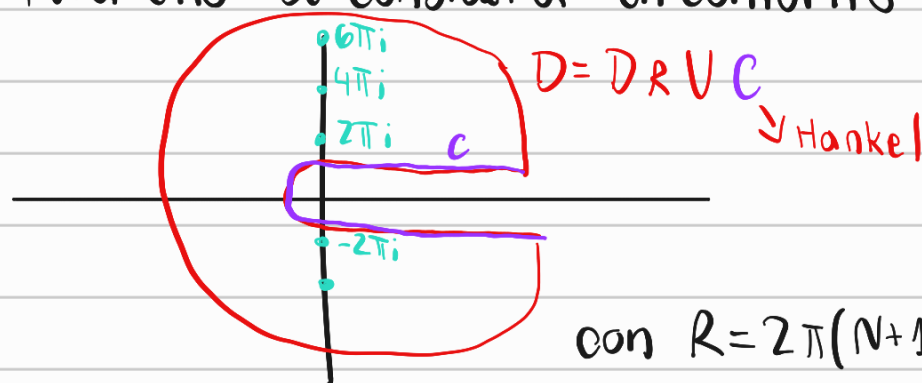
función gamma (extensión de los factoriales)

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Donde C es el contorno de Hanke) dado por:



En particular queremos evaluar la integral $\int_C f(z) dz$ donde $f(z) = \frac{(-z)^{5-1}}{e^z - 1}$. Para ello se considera un contorno D



con $R = 2\pi(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$

De esta manera

$$\oint_D f(z) dz = \int_{D_R} f(z) dz + \int_C f(z) dz$$

Y en virtud del teo de los residuos

$$\int_C f(z) dz = \oint_D f(z) dz = \sum_n \text{Res}(f(z), z_n)$$

polas encerradas
por contorno D

Por lo que sólo hace falta encontrar los residuos de $f(z) = \frac{(-z)^{5-1}}{e^z - 1}$.
Para ello vemos denominador = 0:

$$e^z - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polos de } f(z)}}{z_n} = 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$$

Calculamos sus residuos

$$\text{Res}(f, z_n) = \lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n) f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_n} \cancel{(z - z_n)}^{\substack{z \rightarrow z_n \rightarrow 0 \\ 0}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}$$

bien definido

$$= (-2\pi i n)^{s-1} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)}{e^z - 1} = L$$

limite de la forma $\frac{0}{0}$
 $\Rightarrow$ L'Hopital

$$L = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{\frac{d}{dz}(z - z_n)}{\frac{d}{dz}(e^z - 1)} = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{2\pi i n}} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_n) = (-2\pi i n)^{s-1}$$

Sumando todos los residuos:

$$I = 2\pi i \left[\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=1} (-2\pi i n)^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2\pi i n)^{s-1} \right] / z_n=0 \text{ no se encierra por } D$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} i^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} + (2\pi)^{s-1} (-i)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \right]$$

$$= 2\pi i \left[(2\pi)^{s-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-s}}_{\zeta(1-s)} \left[\underbrace{i^{s-1}}_{e^{i\pi/2}} + \underbrace{(-i)^{s-1}}_{e^{-i\pi/2}} \right] \right]$$

$$= 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \left[e^{i\pi/2(s-1)} + e^{-i\pi/2(s-1)} \right]$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Recordar que
 $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\Rightarrow \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = 2\pi i (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Reemplazando en la funcional de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \prod (1-s) (2\pi)^{s-1} \sum (1-s) 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right)$$

Evaluando en $s = -1$:

$$\zeta(-1) = \underbrace{\prod (2)}_{(2-1)! = 1} (2\pi)^{-2} \sum (2) 2 \cos(-\pi)$$

$$(2-1)! = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{problema de Basilea, resultado conocido})$$

$$= - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\pi^2}{6} 2$$

$$= - \frac{1}{12}$$