Auxiliar 8

Teorema de los residuos

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcule

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$$

Indicación: Puede ser útil recordar el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Solución: Piden calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$$

Para resolverla, cambiamos a variable compleja usando $z = e^{i\theta}$, entonces $d\theta = \frac{dz}{iz}$ y $\cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2}$. Reemplazando quedamos con

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \oint_C \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{2n} \frac{dz}{iz}$$

Donde C es el círculo unitario (esto está ímplicito al hacer el cambio $z = e^{i\theta}$). Expandimos el integrando usando el teorema del binomio:

$$\oint_C \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{i2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} dz$$

Intercambiando la integral y la suma (justificado en que la serie converge uniformemente en C):

$$\oint_C \frac{1}{i2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} dz = \frac{1}{i2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \oint_C z^{2n-2k-1} dz$$

Ahora, dependiendo del valor de $m = 2n - 2k - 1$, la integral sobre el círculo unitario es:

$$\oint_C z^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0 & \text{si } m \neq -1 \end{cases}$$

Esto debido a que si $m > -1$ el integrando es holomorfo y por tanto igual a 0 por Cauchy Goursat. Si $m < 0$ entonces el integrando pasa a tener un polo en $z = 0$, el cual dependiendo del valor de m puede ser un polo simple o de orden mayor. En este caso, el único término que contribuye es aquel donde $m = -1$, es decir, $2n - 2k - 1 = -1$ o $k = n$, para orden mayor el residuo se anula.

$$\begin{aligned} \oint_C z^{2n-2n-1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(z^{2n-2n-1}, 0) \\ &= 2\pi i \cdot \underbrace{\lim_{z\to 0} \cancel{z^{-(-1)}}\,\cancel{z^{-1}}}_{=1} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Por lo tanto, el único término que contribuye a la suma es aquel donde $k = n$ y la integral en este caso vale $2\pi i$. Entonces, la integral original se reduce a:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta &= \frac{1}{i 2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi i \\ &= \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Pregunta 2

a) Defina la función $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{(1 + (z-2)^2)(z-i)^2}$. Demuestre que f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de polos (i.e., meromorfa en $\mathbb{C}$), encuentre sus polos y calcule sus residuos.

b) Calcule
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(4 + (t-2)^2)(t-i)^2}\, dt$$

Indicación: Le puede servir integrar en $f(z)$ en la curva cerrada Γ_R dada por la intersección de $\partial B(0, R)$ unida con $[-R, R]$ orientada de forma positiva. Busque condiciones para que $|e^{iz}| < 1$.

Solución: Pauta en el siguiente enlace P3 C2 Primavera 2024.

Pregunta 3

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

Este es un resultado absurdo, pero que no obstante tiene una razón de ser. Para eso, vamos a revisar la función Zeta de Riemann, que se define preliminarmente por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde $s \in \mathbb{C}$ (vamos a usar s para la variable de la función porque después tendremos un z que se usará para integrar).

Mediante una serie de pasos que pueden ver en el siguiente artículo es posible llegar a una expresión integral alternativa para la función Zeta de Riemann dada por:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz \tag{1}$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ (función gamma) y C es un contorno (llamado contorno de Hankel) el cual desde el infinito pasa por abajo del eje real, a una distancia ϵ positiva que se hará muy pequeña, luego da una media vuelta rodeando el origen en un semicírculo de radio ϵ, para finalmente ir hasta infinito a una distancia ϵ sobre el eje real.

Para evaluar la integral, definimos un nuevo contorno D, el cual se puede ver en la Figura 1, donde el radio grande es $R = (2N+1)\pi$, con N entero y grande.

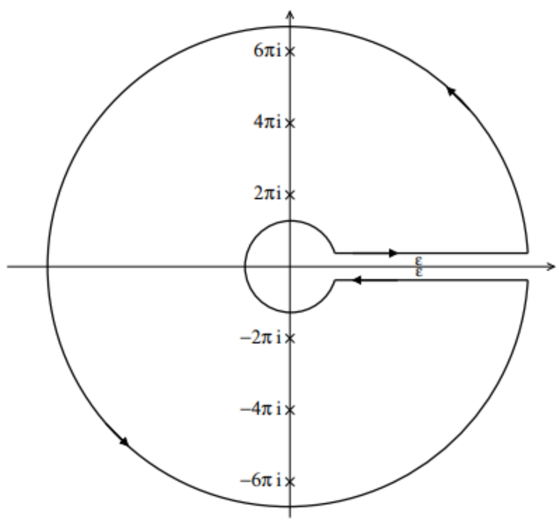

Figura 1: Contorno D.

Notamos que D se conforma por la unión entre el circulo grande y el contorno C. De esta manera, también se puede demostrar que la integral asociada al circulo grande se va a 0 cuando $R \to \infty$, por lo tanto

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz = \oint_D \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}} - 1} dz$$

Teniendo ahora sí una expresión para calcular la integral en un camino cerrado. Evalúe la integral en D con residuos y utilizando la ecuación (1) y el siguiente resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

concluya que $\zeta(-1) = -1/12$.

Noten que hemos demostrado que la función Zeta, extendida analíticamente al plano complejo evaluada en -1 vale $-1/12$. Esta función Zeta se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ solo para $\mathrm{Re}(s) > 1$, por lo que no hemos demostrado que $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$, lo cual ya sabíamos que era falso. Sin embargo, en algunos contextos físicos esto se utiliza (efecto Casimir).

Solución: Algo así no entraría en un control pero de todas formas les subí la pauta a material docente.