Auxiliar 10

Series de Fourier

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) Considere la función periódica de periodo 2π, definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Encuentre la serie de Fourier de la función f.

b) Usando la serie de Fourier obtenida anteriormente pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solución:

a) Para encontrar la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, primero calculamos los coeficientes de Fourier. Los coeficientes a_0, a_n y b_n se definen como sigue:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Como $f(x)$ es una función par, los coeficientes b_n serán cero $\forall n \geq 1$:

$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Ahora calculamos a_0:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Y también a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[2\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx\right] \quad \text{(por simetría de funciones pares)} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes dos veces, primero con $u = x^2$ y $dv = \cos(nx)dx$:

$$\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \cancel{\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2x\sin(nx)\,dx$$

Luego, integramos por partes nuevamente con $u = 2x$ y $dv = \sin(nx)dx$:

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\pi} 2x\sin(nx)\,dx &= -\left[-\frac{2x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \cancel{\frac{2}{n}\int_0^{\pi} 2\cos(nx)\,dx} \\
&= \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n} \\
&= \frac{2\pi(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando los resultados:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2\pi(-1)^n}{n}\right) \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(x) = x^2$ es:

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

b) Una de las aplicaciones de la serie de Fourier es calcular la suma de series infinitas. En este caso, podemos usar la serie de Fourier obtenida para $f(x) = x^2$ para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

evaluando en puntos específicos. La elección de cuál punto escoger es arbitraria, pero naturalmente se escoge aquel que simplifique los cálculos. En este caso, evaluamos en $x = \pi$:

$$\begin{aligned} S_f(\pi) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2n}}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Despejando la suma:

$$\begin{aligned} 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= S_f(\pi) - \frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{S_f(\pi) - \frac{\pi^2}{3}}{4} \end{aligned}$$

Por lo que sólo falta calcular $S_f(\pi)$. Para ello recordemos el teorema de convergencia puntual de series de Fourier:

Teorema de convergencia puntual de series de Fourier: Suponga que $f(x)$ es una función a trozos suave en el intervalo $-L \leq x \leq L$. Entonces, la serie de Fourier de $f(x)$ $S_f(x)$ converge a

- La extensión periódica de $f(x)$ si dicha extensión es continua;
- El promedio de los límites laterales, $\frac{1}{2}[f(a^-) + f(a^+)]$, si la extensión periódica tiene una discontinuidad de salto en $x = a$.

En este caso, $f(x) = x^2$ es continua en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$, incluyendo los limites en $x = -\pi$ y $x = \pi$. Por lo tanto, la serie de Fourier converge a $f(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$, y en particular en $x = \pi$:

$$\begin{aligned} S_f(\pi) &= f(\pi) \\ &= \pi^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Concluyendo el resultado.

Pregunta 2

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a) Demuestre la identidad de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

b) Pruebe que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Solución:

a) Nos piden demostrar la identidad de Parseval, que relaciona la integral del cuadrado de una función con los coeficientes de su serie de Fourier. Partiendo del lado izquierdo y considerando la definición de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \\
&= \left(\frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx}_{=\pi a_0} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \right) \\
&= \left(\pi \frac{a_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx \right)
\end{aligned}$$

Ahora intercambiamos la integral y la suma, usando la convergencia uniforme de la serie de Fourier:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx &= \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \, dx \\
&= \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx}_{=\pi a_n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx}_{=\pi b_n} \right) \\
&= \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\pi a_n^2 + \pi b_n^2 \right) \\
&= \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

Concluyendo la demostración de la identidad de Parseval.

b) Para probar la segunda parte, aplicaremos la identidad de Parseval a la derivada de $f(x)$. Definimos $g(x) = f'(x)$, y por lo tanto derivando la serie de Fourier de $f(x)$ obtenemos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)\right)$$

Entonces, los coeficientes de Fourier de $g(x)$ son $a'_n = -na_n$ y $b'_n = nb_n$. Aplicando la identidad de Parseval a $g(x)$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x))^2\,dx &= \pi\frac{a_0'^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2)\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}\Big((-na_n)^2 + (nb_n)^2\Big)\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$$

Pregunta 3

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(a) Calcule la serie de Fourier de f.

(b) Use la identidad de Parseval para calcular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(c) Indique a qué converge la serie de Fourier para $x = 0$.

Solución:

a) Primero notamos que la función $f(x)$ es impar en el intervalo $[-\pi, \pi]$, por lo que los coeficientes a_n serán cero para todo $n \geq 1$. Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(x)$ solo tendrá términos b_n, los que se definen como:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{(impar por impar es par)} \\
&= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\cancel{2}}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\cos(n\pi)+\cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-(-1)^n+1\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si n es impar, $b_n = \frac{2}{n\pi}$ y si n es par, $b_n = 0$. Haciendo el cambio de índice $n = 2k-1$ para $k \geq 1$, obtenemos:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x)$$

b) Como lo indica el enunciado, usaremos la identidad de Parseval para calcular la suma. Aplicando la identidad a la serie encontrada en el item anterior:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx &= \pi\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}^2 \\
&= \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)^2 \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}^2\,dx \\
&= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\,dx \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Igualando

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

c) Para $x = 0$, la serie de Fourier converge a la media de los valores laterales de $f(x)$ en $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
S_f(0) &= \frac{1}{2}\left(f(0^-) + f(0^+)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la serie de Fourier converge a 0 en $x = 0$.