Auxiliar 10

Series de Fourier

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) Considere la función periódica de periodo 2π, definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Encuentre la serie de Fourier de la función f.

b) Usando la serie de Fourier obtenida anteriormente pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pregunta 2

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 definida por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a) Demuestre la identidad de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

b) Pruebe que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Pregunta 3

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-\pi, 0[\\ \frac{1}{2}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(a) Calcule la serie de Fourier de f.

(b) Use la identidad de Parseval para calcular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

(c) Indique a qué converge la serie de Fourier para $x = 0$.

Series de Fourier

Series de Fourier
Sea $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Se define la serie de Fourier de f como:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right) \right]$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)\, dx$$

Propiedad: Función par
Si $f : [-\tau, \tau] \to \mathbb{R}$ es una función integrable y par, entonces la serie de Fourier de f es:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)$$

Propiedad: Función impar
En cambio, si f es impar:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right)$$