

Auxiliar 9

Teorema de los residuos 2.0

Profesor: Víctor Ramos
 Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Considere un alambre infinito por el cual circula una corriente I_1 y una espira circular de radio a , coplanar con el alambre y tal que el centro de la espira está a una distancia h del alambre, como muestra la Figura ???. Suponga que la espira circular conduce una corriente I_2 . La idea del problema es encontrar la fuerza que actúa sobre la espira donde circula la corriente I_2 en la región coplanar $z = 0$.

Para ello primero se ocupa ley de Ampere de circuitos, determinando la expresión vectorial del campo magnético $\mathbf{B}_1$ debido a la corriente I_1 que circula por el alambre infinito. Teniendo el campo la fuerza se calcula como

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_0^{2\pi} I_2 \, d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$$

Reemplazando con los diferenciales y campos respectivos se llega a

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{j} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta$$

Calcule la fuerza mediante métodos de integración compleja (asuma $h/a > 1$).

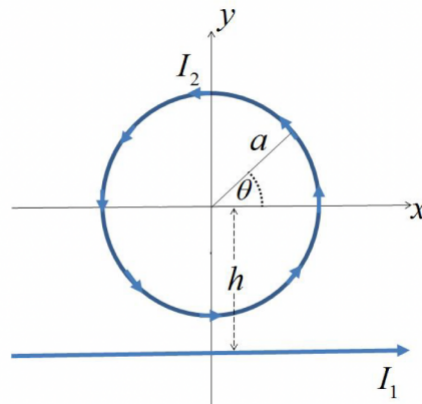


Figura 1: Esquema del alambre infinito y la espira circular.

Solución: La idea del ejercicio es calcular la integral para la fuerza:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta$$

Para resolverla, cambiamos a variable compleja usando $z = e^{i\theta}$, entonces $d\theta = \frac{dz}{iz}$ y $\sin(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}$.

Reescribimos la integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta = \oint_C \frac{\frac{z - z^{-1}}{2i}}{h/a + \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz}$$

Multiplicando numerador y denominador por $2i$:

$$= \oint_C \frac{z - z^{-1}}{2i \left(h/a + \frac{z - z^{-1}}{2i} \right)} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{z^2 - 1}{z (2i(h/a) + z - z^{-1})} \frac{dz}{iz}$$

Multiplicando todo por z para eliminar el z^{-1} :

$$\begin{aligned} &= \oint_C z \frac{z^2 - 1}{iz^2 (2i(h/a)z + z^2 - 1)} dz \\ &= \oint_C \frac{z^2 - 1}{iz (z^2 + 2i(h/a)z - 1)} dz \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la integral, busquemos los polos de la función:

$$z^2 + 2i(h/a)z - 1 = 0 \wedge z = 0$$

$$z_0 = 0 \wedge z_{1,2} = -i(h/a) \pm i\sqrt{(h/a)^2 - 1}$$

Como $h/a > 1$, los polos z_0 y z_1 están en el círculo unitario, y se puede calcular la integral usando el teorema de los residuos. Calculamos el residuo en $z_0 = 0$:

$$\text{Res} \left(\frac{z^2 - 1}{iz(z^2 + 2i(h/a)z - 1)}, z = 0 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^2 - 1}{iz(z^2 + 2i(h/a)z - 1)} = \frac{1}{i}$$

Calculamos el residuo en $z_1 = -i(h/a) + i\sqrt{(h/a)^2 - 1}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f(z), z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \cancel{(z - z_1)} \frac{z^2 - 1}{iz \cancel{(z - z_1)}(z - z_2)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2 - 1}{iz(z - z_2)} \\
 &= \frac{z_1^2 - 1}{iz_1(z_1 - z_2)} \\
 &= \frac{(-i(h/a) + i\sqrt{(h/a)^2 - 1})^2 - 1}{i(-i(h/a) + i\sqrt{(h/a)^2 - 1})(-i(h/a) + i\sqrt{(h/a)^2 - 1} - (-i(h/a) - i\sqrt{(h/a)^2 - 1}))} \\
 &= \frac{-h/a}{i\sqrt{(h/a)^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta &= 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, z_1)) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{i} + \frac{-h/a}{i\sqrt{(h/a)^2 - 1}} \right) \\
 &= 2\pi \left(1 - \frac{h/a}{\sqrt{(h/a)^2 - 1}} \right)
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de la fuerza:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot 2\pi \left(1 - \frac{h/a}{\sqrt{(h/a)^2 - 1}} \right) \hat{j}$$

Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la espira es:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{h/a}{\sqrt{(h/a)^2 - 1}} \right) \hat{j}$$

Pregunta 2

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx.$$

Solución: Definimos la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 - b^2)}$$

Entonces f es de la forma $\frac{e^{iz}}{q(z)}$, con $q(z)$ un polinomio de grado 4. Los ceros de q (y por tanto los polos de f) son $\{-ia, ia, -b, b\}$, cada uno de primer orden.

Aplicando el teorema visto en clase sobre integrales de este tipo de funciones, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) + \pi i [\operatorname{Res}(f, -b) + \operatorname{Res}(f, b)]$$

pues ia pertenece al semiplano superior y $\pm b$ a la recta real (polos reales se toma la mitad del residuo).

Calculando cada residuo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia)f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{(z + ia)(z^2 - b^2)} = \frac{e^{-a}}{(2ia)(-a^2 - b^2)} \\ &= \frac{e^{-a}}{2ia(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, b) &= \lim_{z \rightarrow b} (z - b)f(z) = \lim_{z \rightarrow b} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z + b)} = \frac{e^{ib}}{(b^2 + a^2)2b} \\ &= \frac{\cos(b) + i \sin(b)}{2b(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -b) &= \lim_{z \rightarrow -b} (z + b)f(z) = \lim_{z \rightarrow -b} \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z - b)} = \frac{e^{-ib}}{(b^2 + a^2)(-2b)} \\ &= \frac{\cos(b) - i \sin(b)}{-2b(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx \\ &= \operatorname{Re} [2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) + \pi i (\operatorname{Res}(f, -b) + \operatorname{Res}(f, b))] \end{aligned}$$

Calculando la parte real y simplificando:

$$= -2\pi e^{-a} \frac{1}{2a(a^2 + b^2)} - \pi \frac{\sin(b)}{2b(a^2 + b^2)} - \pi \frac{\sin(b)}{2b(a^2 + b^2)}$$

Por último, como el integrando es una función par, es decir que la integral de $-\infty$ a ∞ es el doble de la integral de 0 a ∞ , tenemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)} dx = -\pi e^{-a} \frac{1}{2a(a^2 + b^2)} - \pi \frac{\sin(b)}{2b(a^2 + b^2)}$$

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.