Auxiliar 9

Teorema de los residuos 2.0

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Considere un alambre infinito por el cual circula una corriente I_1 y una espira circular de radio a, coplanar con el alambre y tal que el centro de la espira está a una distancia h del alambre, como muestra la Figura 1. Suponga que la espira circular conduce una corriente I_2. La idea del problema es encontrar la fuerza que actúa sobre la espira donde circula la corriente I_2 en la región coplanar $z = 0$.

Para ello primero se ocupa ley de Ampere de circuitos, determinando la expresión vectorial del campo magnético $\mathbf{B_1}$ debido a la corriente I_1 que circula por el alambre infinito. Teniendo el campo la fuerza se calcula como

$$\mathbf{F_{1\to 2}} = \int_0^{2\pi} I_2 \ \mathbf{dl_2} \times \mathbf{B_1}$$

Reemplazando con los diferenciales y campos respectivos se llega a

$$\mathbf{F_{1\to 2}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\hat{\jmath}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{h/a + \sin(\theta)} d\theta$$

Calcule la fuerza mediante métodos de integración compleja (asuma $h/a > 1$).

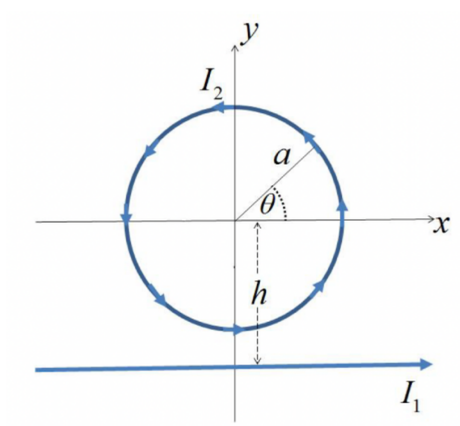

Figura 1: Esquema del alambre infinito y la espira circular.

Pregunta 2

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}\,dx.$$

Evaluación de integrales mediante residuos

Definiciones

- Un punto $p \in \mathbb{C}$ es un **punto singular aislado** si $\exists R > 0$ tal que $f \in H(D(p,r) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p.
- Un punto singular aislado es **evitable** si $\exists L_0(p)$ tal que $L_0(p) = \lim_{z\to p} f(z)$.
- Un punto singular aislado es **polo de orden** m si $\exists m \geq 1$ tal que $L_m(p) = \lim_{z\to p}(z-p)^m f(z)$.
- Un punto es **polo simple** si es polo de orden 1.

Teorema de los residuos de Cauchy
El **residuo** de una función f en un punto p se denota $\operatorname{res}(f,p)$ y se define por

$$\operatorname{res}(f,p) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(p,r)} f(z)dz$$

Si f tiene un polo de orden m en p:

$$\operatorname{res}(f,p) = \frac{g^{(m-1)}(p)}{(m-1)!}$$

donde $f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^m}$ y g es holomorfa en p.
Evaluación de senos y cosenos (cuando el dominio de integración son círculos):
Utilizando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$ en las expresiones

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

obtenemos

$$\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

donde $dz = izd\theta$.

Integrales impropias y dominios no acotados

- **Residuo para funciones sin polos reales**
  Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$, P el conjunto de polos de f. Suponga que f no tiene polos en $\mathbb{R}$, es decir, $P \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Además, $\text{Int}(\mathbb{H}) \cap P$ es finito. Suponga que existen $K \geq 0$, $M \geq 0$, $p > 1$ tales que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ para todo $z \in \mathbb{H}$ con $|z| \geq M$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(\mathbb{H}) \cap P} \text{res}(f, z)$$

- **Residuo para funciones con polos reales simples**
  Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$, P el conjunto de polos de f. Suponga que f tiene polos reales simples, $P \cap \mathbb{R}$ es finito y $\text{Int}(\mathbb{H}) \cap P$ es finito. Existen $K \geq 0$, $M \geq 0$, $p > 1$ tales que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ para todo $z \in \mathbb{H}$ con $|z| \geq M$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(\mathbb{H}) \cap P} \text{res}(f, z) + \pi i \sum_{j=1}^{s} \text{res}(f, a_j)$$

  donde a_j son los polos reales simples de f.

- **Integrales de Fourier por residuos**
  Sea f meromorfa en $\mathbb{C}$, P el conjunto de polos de f. Suponga que $P \cap \mathbb{R} = \emptyset$, $\text{Int}(\mathbb{H}) \cap P$ es finito y existen $K \geq 0$, $M \geq 0$, $p > 1$ tales que $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ para todo $z \in \mathbb{H}$ con $|z| \geq M$. Entonces,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{c_R} f(z) e^{isz} dz = 0$$

  y por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(\mathbb{H}) \cap P} \text{res}(f(z) e^{isz}, w)$$