Auxiliar 8

Teorema de los residuos

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcule

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$$

Indicación: Puede ser útil recordar el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Pregunta 2

a) Defina la función $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(1+(z-2)^2)(z-i)^2}$. Demuestre que f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de polos (i.e., meromorfa en $\mathbb{C}$), encuentre sus polos y calcule sus residuos.

b) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{(4+(t-2)^2)(t-i)^2}\, dt$$

Indicación: Le puede servir integrar en $f(z)$ en la curva cerrada Γ_R dada por la intersección de $\partial B(0,R)$ unida con $[-R,R]$ orientada de forma positiva. Busque condiciones para que $|e^{iz}| < 1$.

Pregunta 3

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

Este es un resultado absurdo, pero que no obstante tiene una razón de ser. Para eso, vamos a revisar la función Zeta de Riemann, que se define preliminarmente por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donde $s \in \mathbb{C}$ (vamos a usar s para la variable de la función porque después tendremos un z que se usará para integrar).

Mediante una serie de pasos que pueden ver en el siguiente artículo es posible llegar a una expresión integral alternativa para la función Zeta de Riemann dada por:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}}-1} dz \tag{1}$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ (función gamma) y C es un contorno (llamado contorno de Hankel) el cual desde el infinito pasa por abajo del eje real, a una distancia ϵ positiva que se hará muy pequeña, luego da una media vuelta rodeando el origen en un semicírculo de radio ϵ, para finalmente ir hasta infinito a una distancia ϵ sobre el eje real.

Para evaluar la integral, definimos un nuevo contorno D, el cual se puede ver en la Figura 1, donde el radio grande es $R = (2N+1)\pi$, con N entero y grande.

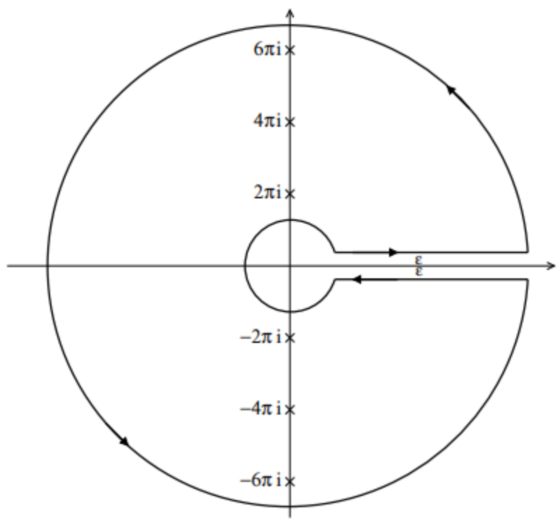

Figura 1: Contorno D.

Notamos que D se conforma por la unión entre el circulo grande y el contorno C. De esta manera, también se puede demostrar que la integral asociada al circulo grande se va a 0 cuando $R \to \infty$, por lo tanto

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}}-1} dz = \oint_D \frac{(-z)^{s-1}}{e^{\frac{1}{z}}-1} dz$$

Teniendo ahora sí una expresión para calcular la integral en un camino cerrado. Evalúe la integral en D con residuos y utilizando la ecuación (1) y el siguiente resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

concluya que $\zeta(-1) = -1/12$.

Noten que hemos demostrado que la función Zeta, extendida analíticamente al plano complejo evaluada en -1 vale $-1/12$. Esta función Zeta se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ solo para $\mathrm{Re}(s) > 1$, por lo que no hemos demostrado que $1+2+3+4+\cdots = -1/12$, lo cual ya sabíamos que era falso. Sin embargo, en algunos contextos físicos esto se utiliza (efecto Casimir).

Teorema de los residuos

Singularidad: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.

Singularidad aislada: Decimos que $p \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de $f(z)$ si f no es holomorfa en p, y existe un radio $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(p, R) \setminus \{p\}$.

Singularidad evitable: $p \in \mathbb{C}$ se dice singularidad evitable si es singularidad aislada y $L_0(p) = \lim_{z\to p} f(z)$ existe.

Polo: $p \in \mathbb{C}$ es un polo de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y existe $m \geq 1$ entero tal que $L_m(p) = \lim_{z\to p}(z-p)^m f(z)$ existe y no es igual a 0. Al menor m que cumpla esto le llamamos el orden de p. En particular, p es polo simple si es polo de orden $m = 1$.

Residuo: Definimos para p un polo de orden m, su residuo como

$$\mathrm{Res}(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-p)^m f(z)\right)$$

que corresponde al coeficiente c_{m-1} de la serie de Laurent de f en torno a p.

Teorema de los Residuos: Sea f una función meromorfa en Ω y P sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y más aún

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, p_j)$$