

Resumen C2

Variable compleja

Bruno Pollarolo



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

15 de mayo de 2025



Representación compleja

● Representación polar

Un número complejo $z = x + iy$ puede ser representado como:

$$z = re^{i\theta},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, + 2k\pi, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



Representación compleja

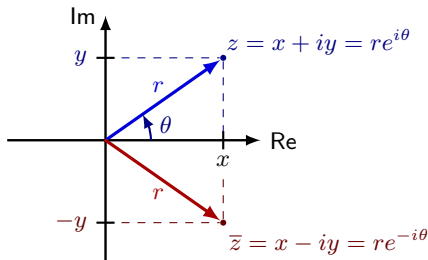
Representación polar

Un número complejo $z = x + iy$ puede ser representado como:

$$z = re^{i\theta},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0, + 2k\pi, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



Función compleja

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se expresa como:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde u, v son funciones de $\mathbb{R}^2$

Funciones complejas

Función compleja

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se expresa como:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde u, v son funciones de $\mathbb{R}^2$

Continuidad

f es continua en z_0 si y solo si u y v son continuas en z_0

Funciones complejas

Función compleja

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se expresa como:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde u, v son funciones de $\mathbb{R}^2$

Continuidad

f es continua en z_0 si y solo si u y v son continuas en z_0

Definición

Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ si:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

Propiedades de la derivación compleja



Propiedades algebraicas

$$(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad \text{si } g(z_0) \neq 0$$

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Propiedades de la derivación compleja



Propiedades algebraicas

$$(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad \text{si } g(z_0) \neq 0$$

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Tip

Las propiedades algebraicas de la derivación compleja son análogas a las reales pero con consecuencias más profundas.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función compleja. f es derivable en $z_0 = (x_0, y_0)$ si y solo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función compleja. f es derivable en $z_0 = (x_0, y_0)$ si y solo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Funciones holomorfas

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si es derivable en todo punto $z_0 \in \Omega$.

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función compleja. f es derivable en $z_0 = (x_0, y_0)$ si y solo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Funciones holomorfas

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si es derivable en todo punto $z_0 \in \Omega$.

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}$$

- Las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables
- Las funciones holomorfas son analíticas (representables mediante series de potencias)

Formas de calcular la derivada compleja

Diferenciación compleja

- Usando la definición de derivada compleja (limite, en la práctica no se utiliza mucho)
- Usando la regla de Wirtinger y las condiciones de Cauchy-Riemann

Formas de calcular la derivada compleja

Diferenciación compleja

- Usando la definición de derivada compleja (limite, en la práctica no se utiliza mucho)
- Usando la regla de Wirtinger y las condiciones de Cauchy-Riemann

Tip

La regla de Wirtinger es útil para funciones holomorfas y simplifica el cálculo de derivadas.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

Propiedades analíticas

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

Las partes real e imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas. Además, las funciones u y v deben ser de clase C^2 , ya que se aplica el teorema de Clairaut-Schwarz para garantizar la conmutatividad de las derivadas parciales mixtas durante la demostración.

Propiedades analíticas

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

Las partes real e imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas. Además, las funciones u y v deben ser de clase C^2 , ya que se aplica el teorema de Clairaut-Schwarz para garantizar la conmutatividad de las derivadas parciales mixtas durante la demostración.

- Funciones polinomiales: $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$
- Función exponencial: $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$
- Funciones trigonométricas: $\sin z, \cos z$
- Función logaritmo (rama principal): $\log z = \ln |z| + i \arg(z)$ (excepto en $z \in \mathbb{R}^-$)
- Funciones racionales: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde p, q son polinomios y $q(z) \neq 0$

Función analítica: Una función $f(z)$ definida en un conjunto Ω de números complejos es analítica si puede expresarse localmente como una serie de potencias.

Función analítica: Una función $f(z)$ definida en un conjunto Ω de números complejos es analítica si puede expresarse localmente como una serie de potencias.

Definición formal

$f(z)$ es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$ centrado en z_0 con radio $R > 0$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

para todo z en $D_R(z_0)$.

Función analítica: Una función $f(z)$ definida en un conjunto Ω de números complejos es analítica si puede expresarse localmente como una serie de potencias.

Definición formal

$f(z)$ es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$ centrado en z_0 con radio $R > 0$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

para todo z en $D_R(z_0)$.

Coeficientes de la serie

Los coeficientes c_k se calculan como:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Función analítica: Una función $f(z)$ definida en un conjunto Ω de números complejos es analítica si puede expresarse localmente como una serie de potencias.

Definición formal

$f(z)$ es analítica en $z_0 \in \Omega$ si existe un disco $D_R(z_0)$ centrado en z_0 con radio $R > 0$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

para todo z en $D_R(z_0)$.

Coeficientes de la serie

Los coeficientes c_k se calculan como:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

En otras palabras, una función analítica es su propia serie de Taylor en su dominio de definición.

Ejemplo 1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Ejemplo 1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Ejemplo 2

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Ejemplo 1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Ejemplo 2

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Tip

Para la gran mayoría de problemas intentaremos evitar el uso de la fórmula de Taylor para los coeficientes, ya que implica derivar k veces una función (lo cual no siempre es trivial), evaluar en puntos particulares y reconocer patrones en los coeficientes. En su lugar utilizaremos estas expansiones conocidas.

Criterio de radios de convergencia: Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, el radio de convergencia R se puede calcular mediante:

Criterio de radios de convergencia: Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, el radio de convergencia R se puede calcular mediante:

Criterio del cociente

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Criterio de radios de convergencia: Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, el radio de convergencia R se puede calcular mediante:

Criterio del cociente

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Criterio de la raíz enésima (Hadamard)

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Criterio de radios de convergencia: Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, el radio de convergencia R se puede calcular mediante:

Criterio del cociente

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Criterio de la raíz enésima (Hadamard)

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

El radio de convergencia determina la zona donde la función f es analítica, es decir, admite derivadas de todos los órdenes en $D_R(z_0)$.

Integración compleja

$\mathbb{C}$ al ser un conjunto vectorial de dimensión 2 (similar a $\mathbb{R}^2$ en ese sentido), podemos definir la integral de línea como:

Integral en $\mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva parametrizada y f es una función compleja.

$\mathbb{C}$ al ser un conjunto vectorial de dimensión 2 (similar a $\mathbb{R}^2$ en ese sentido), podemos definir la integral de línea como:

Integral en $\mathbb{C}$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva parametrizada y f es una función compleja.

Parametrizaciones típicas:

- Circunferencia de radio R centrada en z_0 ($|z - z_0| = R$): $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
- Recta que une el punto z_1 y z_2 : $\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$, $t \in [0, 1]$

Teorema de Cauchy-Goursat

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, con Ω abierto simplemente conexo, entonces:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada, simple y regular en Ω .

Teorema de Cauchy-Goursat

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, con Ω abierto simplemente conexo, entonces:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva cerrada, simple y regular en Ω .

Fórmula integral de Cauchy (derivada)

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega$, entonces:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

para toda curva cerrada Γ que encierra a z_0 .