Auxiliar 7

Integración compleja y Fórmulas de Cauchy

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) **(P3 C3 Primavera 2023)** Calcule por definición la integral

$$\int_\Gamma \frac{3}{z-1}\,dz,$$

donde Γ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, recorrida en sentido antihorario.

b) **(P3 C2 Otoño 2023)** Sea f holomorfa en un dominio D, con $|f(z)-1|<1$ para todo $z\in D$. Probar que si $\gamma\subset D$ es una curva cerrada, entonces

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0.$$

Solución:

a) La integral se puede calcular usando la parametrización $z(t)=1+e^{it}$, con $t\in[0,2\pi]$. Entonces, tenemos:

$$\int_\Gamma \frac{3}{z-1}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{3}{e^{it}} ie^{it}dt = 3i\int_0^{2\pi} dt = 6\pi i.$$

b) Definamos $g(z)=\log(f(z))$. Dado que $|f(z)-1|<1$, podemos afirmar que g está bien definida, ya que $f(z)$ no intersecta el semi-eje negativo del plano complejo. Además, g es holomorfa ya que es la composición de funciones holomorfas en D. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos $g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z\in D$. Por lo tanto,

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint_\gamma g'(z)\,dz = 0,$$

pues g es la primitiva de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y γ es una curva cerrada.

Pregunta 2 (P2 C2 Otoño 2023)

a) Calcule el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{z^2 + 4z + 1}\, dz,$$

donde Γ es la circunferencia centrada en $z = 0$ y radio 1.

b) Use el resultado anterior para calcular la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta}\, d\theta.$$

Indicación: Puede parametrizar Γ como $\Gamma(\theta) = e^{i\theta}$.

Solución:

a) Notemos primero que las raíces del polinomio $z^2 + 4z + 1$ están dadas por

$$z_1 = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 + \sqrt{3}, \qquad z_2 = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 - \sqrt{3}.$$

Observemos que $|z_1| < 1$ y $|z_2| > 2$. En particular, solo z_1 está encerrada por la curva Γ. Por lo tanto, la integral se puede escribir como

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_1} dz,$$

donde $f(z) = \frac{1}{z - z_2}$ es holomorfa en un abierto simplemente conexo que contiene a la curva Γ. Utilizando la fórmula de Cauchy, tenemos

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2 + 4z + 1} = 2\pi i f(z_1) = 2\pi i \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}}.$$

b) Partimos con la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}.$$

Es importante notar que $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, lo que permite transformar integrales trigonométricas en integrales complejas usando la parametrización $z = e^{i\theta}$, con $dz = ie^{i\theta} d\theta$.

Reescribimos el denominador:

$$2 + \cos\theta = 2 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{4 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{2\, d\theta}{4 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}.$$

Ahora, usando $z = e^{i\theta}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ y $e^{-i\theta} = z^{-1}$, la integral se transforma en una integral

sobre la circunferencia unitaria Γ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\,d\theta}{4+z+z^{-1}} = \int_\Gamma \frac{2}{4+z+z^{-1}} \cdot \frac{dz}{iz}.$$

Multiplicando numerador y denominador por z:

$$= \int_\Gamma \frac{2}{4z+z^2+1} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_\Gamma \frac{2}{z^2+4z+1} \cdot \frac{dz}{iz}.$$

$$= \frac{2}{i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2}{i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Usando el resultado de la parte anterior,

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+4z+1} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}},$$

entonces,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pregunta 3 (P2 C2 Otoño 2024)

a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y Γ como la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada positivamente y sea $a \in \mathbb{C}$, tal que $|a| > 1$. Supongamos que f es una función holomorfa (regular) en el disco D y que cumple la igualdad

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = 0.$$

Calcule el valor de $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

b) Calcule la integral:

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Solución:

a) Para calcular $f'\left(\frac{1}{a}\right)$, una buena idea es aplicar la fórmula de diferenciación de Cauchy, que permite calcular derivadas de funciones holomorfas integrando funciones racionales con polos. Primero, identificamos los polos de la función bajo la integral:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz$$

El integrando tiene un polo en $z_0 = \frac{1}{a}$ de orden 2, ya que $(az-1)^2 = 0$ cuando $z = \frac{1}{a}$. Además, como $|a| > 1$, se tiene $|z_0| = \left|\frac{1}{a}\right| < 1$, por lo que el polo está dentro de Γ.

La fórmula de diferenciación de Cauchy para una función holomorfa f en un disco que encierra z_0 es:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

En nuestro caso, $n = 1$ y $z_0 = \frac{1}{a}$, así que:

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{a^2} = \frac{1!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{a^2(z-\frac{1}{a})^2} dz$$

Pero en la integral dada aparece $(az-1)^2 = a^2(z-\frac{1}{a})^2$, es decir,

$$\frac{1}{(az-1)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{(z-\frac{1}{a})^2}$$

Por lo tanto,

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = \frac{1}{a^2} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{a})^2} dz$$

Pero por el enunciado, esta integral es 0, es decir,

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = 0 \implies \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{a})^2} dz = 0$$

Por la fórmula de Cauchy,

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{a})^2} dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{f'\left(\frac{1}{a}\right) = 0}$$

b) Nos piden calcular la integral

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Esta es una integral real la cual puede ser resuelta con los métodos típicos de cálculo diferencial. Sin embargo para este caso particula se hace muy tedioso. Si no me creen busquen la primitiva en Wolfram. Por ello, una de las principales aplicaciones del cálculo complejo y la fórmula de Cauchy es facilitar el cálculo de este tipo de integrales impropias con primitivas complicadas. Para ello lo primero que se hace es definir $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ (cambiar la x por z básicamente). Lo segundo es definir un contorno de integración cerrado que permita calcular la integral real (recta en el eje real). La elección de cómo cerrar este contorno es arbitraria, no obstante hay que tener cuidado con la orientación. En este caso por simplicidad podemos elegir un semicirculo de radio R (que lo haremos tender a ∞) en

la parte superior del plano complejo. Entonces, la integral cerrada es:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

Donde Γ_R es el semicirculo de radio R en la parte superior del plano complejo. Hecho esto, ahora hay que analizar a la función $f(z)$ para ver si tiene polos. En este caso, la función tiene un polo de orden 2 (generalmente el orden coincide con el exponente al cual está elevado el polo en forma factorizada, pero no siempre) en $z = i$ y otro en $z = -i$. Como el contorno Γ_R es el semicirculo de radio R en la parte superior del plano complejo, solo nos interesa el polo en $z = i$. Entonces, por la fórmula de Cauchy para derivadas, tenemos que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \cdot g'(i)$$

Donde $g(z) = \frac{z^2}{(i+z)^2}$. Calculemos $g'(i)$:

$$g'(z) = \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4}$$

Evaluando en $z = i$:

$$g'(i) = \frac{2i(i+i)^2 - 2i^2(i+i)}{(i+i)^4} = \frac{(2i)^3 + 4i}{(2i)^4} = \frac{-8i + 4i}{16} = \frac{-4i}{16} = -\frac{i}{4}$$

Entonces, la integral cerrada es:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot g'(i) = 2\pi i \cdot -\frac{i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Y por lo tanto tomando la relación dada por 1 y despejando $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

Notamos que estamos casi listos pues solo falta tomar límite $R \to \infty$ y analizar el comportamiento de la integral en el semicirculo en el mismo límite. Para esto, la estrategia a utilizar normalmente será acotar sucesivamente la integral hasta llegar a una expresión que tienda a 0 cuando $R \to \infty$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,|dz| \\
&= \int_0^{\pi} \left|\frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta}+1)^2}\right| R d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|R^2 e^{2i\theta}+1|^2} d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{(R^2-1)^2} d\theta \quad \text{desigualdad triangular inversa} \\
&= \frac{R^3}{(R^2-1)^2}\pi
\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $R \to \infty$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^3}{(R^2-1)^2}\pi = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$