Auxiliar 7

Integración compleja y Fórmulas de Cauchy

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

a) **(P3 C3 Primavera 2023)** Calcule por definición la integral

$$\int_\Gamma \frac{3}{z-1}\, dz,$$

donde Γ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, recorrida en sentido antihorario.

b) **(P3 C2 Otoño 2023)** Sea f holomorfa en un dominio D, con $|f(z)-1|<1$ para todo $z \in D$. Probar que si $\gamma \subset D$ es una curva cerrada, entonces

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0.$$

Pregunta 2 (P2 C2 Otoño 2023)

a) Calcule el valor de la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{z^2+4z+1}\, dz,$$

donde Γ es la circunferencia centrada en $z=0$ y radio 1.

b) Use el resultado anterior para calcular la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta.$$

Indicación: Puede parametrizar Γ como $\Gamma(\theta) = e^{i\theta}$.

Pregunta 3 (P2 C2 Otoño 2024)

a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y Γ como la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada positivamente y sea $a \in \mathbb{C}$, tal que $|a| > 1$. Supongamos que f es una función holomorfa (regular) en el disco D y que cumple la igualdad

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(az-1)^2} dz = 0.$$

Calcule el valor de $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

b) Calcule la integral:

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Fórmulas de Cauchy

Teorema de Cauchy-Goursat: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, con Ω abierto simplemente conexo, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada, simple y regular en Ω.

Fórmula de Cauchy: Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(z_0, r)$ se cumple que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw$$

Fórmula de Cauchy (derivada): Sea f una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(z_0, r)$ se cumple que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$