Auxiliar 6

Series de potencia e introducción a integración compleja

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Determine la expansión en serie de potencias de las siguientes funciones:

a) $\sinh(z)$ en torno a $z = 0$

b) $\log(z)$ en torno a $z = 1$

c) $\frac{2z+3}{z+1}$ en torno a $z = 1$

Además calcule sus radios de convergencia.

Solución:
Para este problema intentaremos evitar el uso de la fórmula de Taylor para los coeficientes puesto que implica derivar k veces una función (cosa para nada trivial), evaluar en puntos particulares y reconocer patrones dentro de los coeficientes. De todas se puede ocupar cuando ya no quede de otra.

a) $\sinh(z)$ en torno a $z = 0$. Por definición de seno hiperbólico, tenemos que

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Y además se sabe que la serie de Taylor de e^z en torno a $z = 0$ es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sinh(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n-(-z)^n}{n!}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)z^n}{n!}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)z^n}{n!}
\end{aligned}$$

Notemos que el término $1-(-1)^n$ es cero para n par y uno para n impar. Por lo tanto, podemos escribir

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

El radio de convergencia de esta serie es infinito, ya que la serie de Taylor de e^z tiene radio de convergencia infinito.

b) $\log(z)$ en torno a $z=1$. Debemos llegar a algo del estilo:

$$\log(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \quad \text{para todo } z \text{ con } |z-1| < R.$$

Por otra parte sabemos que $\int \frac{1}{z}dz = \log(z) + C$ para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, y tenemos expresiones en serie de potencias relacionadas con $\frac{1}{z}$, como la geometrica:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1,\\
\frac{1}{w} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-w)^n \quad \text{cambio de variable } w = z-1 \ \forall\ |w-1| < 1.\\
\frac{1}{w} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(w-1)^n
\end{aligned}$$

Ahora integramos ambos lados de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{w}dw &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(w-1)^n\right)dw\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int (w-1)^n dw\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(w-1)^{n+1}}{n+1} + C
\end{aligned}$$

Ocupando que $\int \frac{1}{w} dw = \log(w)$ y un cambio de índice $n \to k+1$ en la serie, obtenemos

$$\log(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (w-1)^k + C$$

Como las variables son mudas, podemos cambiar w por z y k por n. Por lo tanto, tenemos que

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n + C$$

Donde C es una constante que podemos determinar al evaluar en $z = 1$:

$$\log(1) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (1-1)^n + C$$

Sigue que los coeficientes de la serie son

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Y el radio de convergencia es $R = 1$, pues partimos de la serie geometrica que converge para $|z-1| < 1$.

c) $\frac{2z+3}{z+1}$ en torno a $z = 1$. Para resolver este problema, definimos $w = z - 1$ para que la expansión en torno a 1 surja de forma natural, de modo que $z = w + 1$. Entonces, tenemos:

$$\frac{2z+3}{z+1} = \frac{2(w+1)+3}{(w+1)+1} = \frac{2w+5}{w+2}.$$

Recordemos que la serie geométrica para $\frac{1}{1-z}$ es:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para } |z| < 1.$$

En este caso, reescribimos $\frac{1}{w+2}$ como:

$$\frac{1}{w+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{w}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \quad \text{para } |w| < 2.$$

Multiplicamos esta serie por $2w + 5$:

$$\frac{2w+5}{w+2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \right) (2w+5).$$

Distribuimos el producto:

$$\frac{2w+5}{w+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (2w^{n+1} + 5w^n).$$

Separando en dos sumas:

$$\frac{2w+5}{w+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+\cancel{1}}} \cdot \cancel{2}w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot 5w^n.$$

Hacemos un cambio de índice en la primera suma, $k = n+1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot w^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} \cdot 2w^k.$$

Y separando el primer término de la segunda suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot 5w^n = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot 5w^n.$$

Finalmente, sumando ambas series:

$$\frac{2w+5}{w+2} = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot 5 \right) w^n.$$

Simplificando el coeficiente que acompaña a w^n:

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

Por lo tanto, la expansión en serie de potencias de $\frac{2z+3}{z+1}$ en torno a $z = 1$ es:

$$\frac{2z+3}{z+1} = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n.$$

El radio de convergencia es $R = 2$, ya que la serie geométrica converge para $|w = z-1| < 2$.

Pregunta 2

Sea la función

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{1+8z^3}$$

a) Demuestre que existe una secuencia de números complejos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| < \frac{1}{10}.$$

b) Demuestre que los coeficientes c_n satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = 1, \\ 2 & \text{si } n = 2, \\ -8c_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

c) Calcule el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$.

Solución:

a) Para demostrar que existe una secuencia de números complejos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| < \frac{1}{10},$$

consideramos que $f(z)$ es holomorfa en el disco abierto $B(0, 1/10)$, ya que el denominador $1 + 8z^3$ no se anula para $|z| < 1/10$. Por lo tanto, sí es posible expandir $f(z)$ en una serie de potencias con una secuencia de coeficientes complejos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determinada.

b) Para determinar los coeficientes c_n, podemos expandir el denominador $1 + 8z^3$ en una serie de potencias. Utilizando la fórmula de la serie geométrica, tenemos:

$$\frac{1}{1+8z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-8z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-8)^n z^{3n}$$

Multiplicando ambos lados por el numerador $1 + 2z^2$, obtenemos:

$$f(z) = (1 + 2z^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-8)^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-8)^n z^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(-8)^n z^{3n+2}.$$

De esto se concluye que

$$c_{3n} = (-8)^n, \quad c_{3n+1} = 0, \quad c_{3n+2} = 2(-8)^n,$$

lo que en particular satisface las ecuaciones dadas en el enunciado. Pues para $n = 0$ tenemos que $c_0 = (-8)^0 = 1$, $c_{3\cdot 0+1} = c_1 = 0$ y $c_{3\cdot 0+2} = c_2 = 2(-8)^0 = 2$. Para $n \geq 3$, se cumple la relación de recurrencia $c_n = -8c_{n-3}$.

c) De la expansión del item anterior, los coeficientes c_n son de la forma:

$$c_n = \begin{cases} (-8)^m & \text{si } n = 3m, \\ 0 & \text{si } n = 3m+1, \\ 2(-8)^m & \text{si } n = 3m+2, \end{cases}$$

donde $m \in \mathbb{N}$. Teniendo los coeficientes podemos calcular el radio de convergencia mediante el criterio de la raíz:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Notemos que para $n = 3m$, el valor de $|c_n|^{1/n}$ es:

$$|c_n|^{1/n} = |(-8)^m|^{1/3m} = 8^{1/3}$$

Para $n = 3m + 1$, el valor de $|c_n|^{1/n}$ es:

$$|c_n|^{1/n} = 0^{1/(3m+1)} = 0.$$

Y finalmente para $n = 3m + 2$, el valor de $|c_n|^{1/n}$ es:

$$|c_n|^{1/n} = |2(-8)^m|^{1/(3m+2)} = 2^{1/(3m+2)} \cdot 8^{m/(3m+2)}.$$

Para $m \to \infty$, el término $2^{1/(3m+2)}$ tiende a 1, y el término $8^{m/(3m+2)}$ tiende a $8^{1/3}$. Como tanto para $n = 3m$ como para $n = 3m+2$ el valor de $|c_n|^{1/n}$ tiende a $8^{1/3}$, y para $n = 3m+1$ el valor es 0, podemos concluir que el radio de convergencia es:

$$R = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{2}.$$

Pregunta 3

Considere la función $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por (recuerde que todo número complejo no nulo se puede escribir en su forma polar como $z = re^{i\theta}$, donde $r \geq 0$ es el radio y $\theta \in (-\pi, \pi]$ es el argumento principal de z):

$$\log z = \ln r + i\theta$$

la cual es holomorfa cuando está restringida a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

a) Sea $R > 0$. Muestre que, al orientar $\partial B(0, R)$ de forma positiva,

$$\oint_{\partial B(0,R)} \log z \, dz = -2\pi i R$$

b) Dado que $\log z$ es holomorfa y que $\partial B(0, R)$ es una curva cerrada, ¿el valor de la integral encontrada en el ítem anterior contradice el teorema de Cauchy-Goursat? Justifique.

Solución: Ante de resolver el problema recordemos algunas particularidades del logaritmo complejo. Y es que para extender el logaritmo a los complejos queremos mantener sus buenas propiedades, en particular ser función inversa de e^z ya bien definida. Para ello ocupamos la forma polar $z = Re^{i\theta}$:

$$\log(z) = \log\left(Re^{i\theta}\right) = \log(R) + \log\left(e^{i\theta}\right).$$

Dado que $\log(e^{i\theta}) = i\theta$ por ser la función inversa, definimos $\log(z)$ como:

$$\log(z) = \ln(R) + i\theta,$$

donde $R = |z|$ y $\theta = \arg(z)$.

Sin embargo, hay un problema con esta definición, ya que al dar vueltas en el plano complejo ($\theta = \theta_0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$), el ángulo asociado al logaritmo aumenta sin restricción, lo que causa que de un punto salgan múltiples valores (ya que hay infinitas formas de describir el ángulo). La solución es restringir el ángulo a intervalos acotados. El corte más usado es $\theta \in (-\pi, \pi]$, lo que causa que $\log(z)$ esté definido solo para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Este corte se llama la rama principal del logaritmo.

a) Para calcular la integral, utilizamos la parametrización de la curva cerrada $\partial B(0, R)$, que es el círculo de radio R centrado en el origen. La parametrización es:

$$z(t) = Re^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Entonces, la integral se convierte en:

$$\oint_{\partial B(0,R)} \log z \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(Re^{it}\right) \cdot iRe^{it} dt.$$

Aquí, $dz = iRe^{it}dt$ es la derivada de la parametrización con respecto a t. Ahora, sustituimos la expresión de $\log(z)$:

$$= iR \int_{-\pi}^{\pi} (\ln R + it)e^{it} dt.$$

Separando la integral en dos partes:

$$= iR \left(\ln R \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dt + i \int_{-\pi}^{\pi} te^{it} dt \right).$$

La primera integral es cero, ya que la integral de e^{it} sobre un período completo es cero. La segunda integral se resuelve utilizando integración por partes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} te^{it} dt = \left[\frac{te^{it}}{i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} dt = \frac{-2\pi}{i}$$

Por lo tanto, la integral se simplifica a:

$$= iR \left(0 + \cancel{i} \cdot \frac{-2\pi}{\cancel{i}} \right) = -2\pi iR.$$

b) El teorema de Cauchy-Goursat establece que si una función es holomorfa en una región simplemente conexa y se integra a lo largo de una curva cerrada dentro de esa región, el resultado de la integral debe ser cero. Sin embargo, en este caso, $\log(z)$ no es holomorfa en todo el plano complejo debido a su discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ (donde el argumento principal cambia). Por lo tanto, la integral no contradice el teorema de Cauchy-Goursat porque $\log(z)$ no es holomorfa en toda la región encerrada por $\partial B(0, R)$.