Auxiliar 5

Introducción a variable compleja

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Determine todas las soluciones complejas de la ecuación

$$z^4 + 1 = 0.$$

Solución: Notamos que la ecuación no tiene soluciones reales, ya que $z^4 > 0$ y debe ser igual a -1. Para facilitar el cálculo, factorizamos la ecuación como:

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i) = 0.$$

Factorizando nuevamente, tenemos que:

$$(z^2 + i) = (z - i\sqrt{i})(z + i\sqrt{i})$$

y

$$(z^2 - i) = (z - \sqrt{i})(z + \sqrt{i}).$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$z = i\sqrt{i}, -i\sqrt{i}, \sqrt{i}, -\sqrt{i}.$$

No obstante, cabe preguntarse ¿qué es $\sqrt{i}$ y cómo lo ubicamos en el plano complejo? Para ello, escribimos i en forma polar:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Sacando la raíz cuadrada, tenemos que:

$$\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Y ocupando que $-1 = e^{i\pi} \wedge i = e^{i\pi/2}$ podemos escribir el resto de soluciones en forma polar como:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_2 &= -\sqrt{i} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_3 &= i\sqrt{i} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_4 &= -i\sqrt{i} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Lo que en el plano complejo corresponde a los siguientes puntos:

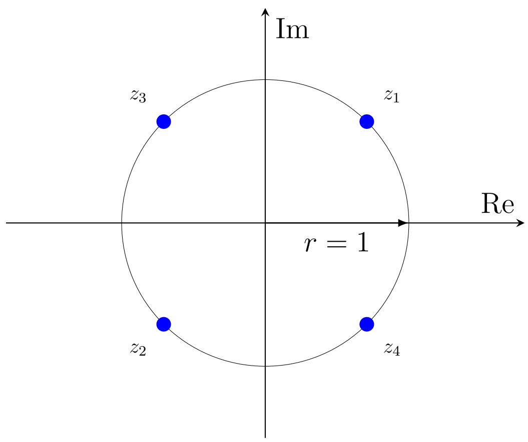

Figura 1: Soluciones de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ en el plano complejo.

Pregunta 2

Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$ y calcule su derivada:

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = e^{x}(\cos(y) - i\sin(y))$

c) $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$

Solución:

a) Para determinar si una función es holomorfa, debemos verificar si satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Estas son dos ecuaciones que relacionan las derivadas parciales de las partes real e imaginaria de la función. Dado $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son:

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.
$$

Verifiquemos si se cumplen para $f(z)=\overline{z}$. Escribiendo $f(z)$ con la estructura $f(z=x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, tenemos que $u(x,y)=x$ y $v(x,y)=-y$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Observamos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se cumplen, por lo que la función $f(z)=\overline{z}$ no es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su derivada no existe en ninguna parte del plano complejo.

b) Para $f(z)=e^x(\cos(y)-i\sin(y))$, escribimos la función como $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, donde $u(x,y)=e^x\cos(y)$ y $v(x,y)=-e^x\sin(y)$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos(y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin(y), \qquad -\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin(y).$$

Igualando las derivadas parciales, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ e^x\cos(y)&=-e^x\cos(y)\\ 2e^x\cos(y)&=0.\end{aligned}$$

Como $e^x\neq 0$ para todo x, la ecuación se cumple si y solo si $\cos(y)=0$. Esto ocurre para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, es decir, $y=\frac{2k+1}{2}\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Por otro lado, de la otra ecuación de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\\ -e^x\sin(y)&=e^x\sin(y)\\ 2e^x\sin(y)&=0.\end{aligned}$$

Nuevamente, como $e^x\neq 0$ para todo x, la ecuación se cumple si y solo si $\sin(y)=0$. Esto ocurre para los múltiplos enteros de π, es decir, $y=m\pi$ con $m\in\mathbb{Z}$. Ambas ecuaciones ecuaciones se deben cumplir simultáneamente para que la función se holomorfa. No obstante la intersección de los conjuntos $\{y=\frac{2k+1}{2}\pi\}$ y $\{y=m\pi\}$ es vacía, pues igualando se llega a que m debe ser igual a $k+\frac{1}{2}$, lo que no es posible puesto que m es un entero. Por lo tanto, la función $f(z)=e^x(\cos(y)-i\sin(y))$ no es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, ya que no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto del plano complejo.

c) Para $f(z)=e^{-x}(\cos(y)-i\sin(y))$, ahora sí es holomorfa, pues retomando los cálculos anteriores, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos(y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}\cos(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}\sin(y), \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\sin(y).$$

Entonces, igualando las derivadas parciales, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ -e^{-x}\cos(y) &= -e^{-x}\cos(y)\\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

La ecuación se cumple para todo x y y. Por otro lado, de la otra ecuación de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\\ -e^{-x}\sin(y) &= e^{-x}\sin(y)\\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Nuevamente, la ecuación se cumple para todo x y y. Por lo tanto, la función $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Para calcular su derivada nos podemos valer de la siguiente fórmula (que sale de la regla de Wirtinger)

$$\frac{d}{dz}f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}f(z) &= -e^{-x}\cos(y) + ie^{-x}\sin(y)\\ &= -e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))\\ &= -e^{-x}e^{-iy}\\ &= -e^{-(x+iy)}\\ &= -e^{-z}.\end{aligned}$$

Pregunta 3

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $\Omega \neq \emptyset$ abierto, holomorfa en Ω. En coordenadas polares se tiene que $z = re^{i\theta}$ y que f puede ser escrito como $f = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ con u y v diferenciables. Pruebe que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \tag{2}$$

Solución:

Para demostrar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, comenzamos escribiendo la función $f(z)$ en términos de sus componentes reales e imaginarias. Dado que $z = re^{i\theta}$, podemos escribir:

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

Ahora, aplicamos la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de u y v con respecto a r y θ, asumiendo el cambio de variables de coordendas cartesianas a polares $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$ pues sabemos la forma de las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) - \frac{\partial v}{\partial x}\sin(\theta) \quad \text{(por Cauchy-Riemann } u_y = -v_x)
\end{aligned}$$

De manera similar, para la derivada parcial de v con respecto a θ, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos(\theta)) \\
&= r\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(\theta)\right)
\end{aligned}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Haciendo un procedimiento similar para la derivada parcial de u con respecto a θ, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos(\theta)) \\
&= -r\frac{\partial u}{\partial x}\sin(\theta) + r\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Y para la derivada parcial de v con respecto a r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) \quad \text{(por Cauchy-Riemann v_x=-u_y)}
\end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas ($\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$), podemos simplificar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) - r\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) \\
&= -r\left(\frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta)\right) \\
&= -r\frac{\partial v}{\partial r}
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a la segunda ecuación de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

De este modo, hemos demostrado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares son:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{3}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \tag{4}$$

Pregunta 4

a) Sea una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demuestre que si f y $\overline{f}$ son holomorfas, entonces f es una función constante.

b) Sea $u(x, y) = g(x + y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde g es una función real suficientemente diferenciable. ¿Para cuáles g la función u corresponde a la parte real de una función holomorfa f?

Solución:

a) Describiendo f y $\overline{f}$ en cartesianas $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\overline{f}(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$. Como ambas son holomorfas, entonces cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

para f, y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{7}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{8}$$

para $\overline{f}$.

Juntando la primera ecuación de f con la primera ecuación de $\overline{f}$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

De manera análoga:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

Como estas derivadas parciales son cero y las relaciones son válidas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos concluir que u y v son funciones constantes. Sigue que f es una función constante.

b) Para que $u(x, y) = g(x + y)$ sea parte real de una función holomorfa, debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{11}$$

Calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g'(x+y) \tag{12}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g''(x+y) \tag{13}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = g'(x+y) \tag{14}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g''(x+y) \tag{15}$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace:

$$g''(x+y) + g''(x+y) = 2g''(x+y) = 0 \tag{16}$$

Por lo tanto, $g''(x+y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, lo que implica que g es una función lineal de la forma $g(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Así, $u(x,y) = a(x+y) + b$ y la correspondiente función holomorfa sería $f(z) = a(x+y) + b + iv(x,y)$.

Para encontrar v, utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = a \tag{17}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -a \tag{18}$$

Integrando estas ecuaciones, obtenemos $v(x,y) = a(y-x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Finalmente, la función holomorfa es $f(z) = a(x+y) + b + i(a(y-x) + c) = a(x+iy) + a(y-ix) + b + ic = az + a\overline{z} + (b+ic)$.

Si redefinimos las constantes como $A = a$, $B = b + ic$, tenemos $f(z) = A(z + \overline{z}) + B = 2A\text{Re}(z) + B$.