Auxiliar 5

Introducción a variable compleja

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Determine todas las soluciones complejas de la ecuación

$$z^4 + 1 = 0.$$

Pregunta 2

Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo C y calcule su derivada:

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = e^x(\cos(y) - i\sin(y))$

c) $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$

Pregunta 3

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $\Omega \neq \emptyset$ abierto, holomorfa en Ω. En coordenadas polares se tiene que $z = re^{i\theta}$ y que f puede ser escrito como $f = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ con u y v diferenciables. Pruebe que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares toman la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \tag{2}$$

Pregunta 4

a) Sea una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Demuestre que si f y $\overline{f}$ son holomorfas, entonces f es una función constante.

b) Sea $u(x,y) = g(x+y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde g es una función real suficientemente diferenciable. ¿Para cuáles g la función u corresponde a la parte real de una función holomorfa f?

Variable compleja

Representación en forma polar de un número complejo: Un número complejo $z = x+iy$ puede ser representado en forma polar como $z = re^{i\theta}$, donde r es el módulo o la magnitud de z y θ es el argumento de z. Para calcular r y θ a partir de x e y, usamos las siguientes fórmulas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases} + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Función Compleja: Decimos que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función compleja. Usualmente, se denota $f(z)$, con $z = x+iy$, como $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ con u, v funciones de $\mathbb{R}^2$.

Continuidad: Sea f una función compleja, decimos que f es continua en z_0 si y solo si u y v son continuas en z_0. Notemos que, para funciones complejas, operaciones de álgebra y composición de continuas es continua.

Derivabilidad: Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) si el límite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se denota por $f'(z_0)$.

Propiedades de funciones derivables:

1. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones derivables en z_0 y sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces la función $h = \alpha f + g$ también es derivable en z_0 y se tiene

$$h'(z_0) = (\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

2. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son derivables en z_0, entonces el producto fg es derivable en z_0 y se tiene

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son derivables en z_0 con $g(z_0) \neq 0$, entonces el cociente $\frac{f}{g}$ es derivable en z_0 y se tiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

4. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $g : D \to \mathbb{C}$ es derivable en $f(z_0) \in D$, entonces la composición $g \circ f$ es derivable en z_0 y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

Funciones holomorfas y condiciones de Cauchy-Riemann

Ecuaciones de Cauchy-Riemann: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja. Decimos que f es derivable si y solo si u, v son diferenciables en $z_0 = (x_0, y_0)$ y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Funciones holomorfas: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$, si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

cuyo valor $f'(z_0)$ lo llamaremos la derivada de f en z_0. Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$, diremos que es holomorfa en Ω. El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota $\mathcal{H}(\Omega)$, es decir

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}.$$