

Auxiliar 4

Teorema de la divergencia

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sean

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, z + 1)$$

y S la frontera de la región sólida acotada superiormente por el plano $z = 2x$ e inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$. Calcular

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Solución: Lo primero que notamos es que el campo $\mathbf{F}$ tiene una forma complicada, por lo que calcular la integral de flujo por definición es un poco tedioso. En estos casos siempre vale la pena verificar si la divergencia del campo es sencilla, ya que si lo es, podemos aplicar el teorema de la divergencia y ahorrar bastante trabajo. En efecto, la divergencia de $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} (y(x^2 + y^2)^{3/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-x(x^2 + y^2)^{3/2}) + \frac{\partial}{\partial z} (z + 1) \\ &= \cancel{y \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{1/2} 2x} - \cancel{x \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{1/2} 2y} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Y dado que $\mathbf{F}$ es clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (en particular la región encerrada por S), entonces se tienen todas las condiciones para aplicar el teorema de la divergencia. De esta forma, la integral de flujo se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_{\Omega} 1 \, dV \\ &= \text{Vol}(\Omega) \end{aligned}$$

Donde Ω es el sólido encerrado por S . Para encontrar el volumen de Ω podemos hacer un cambio

a coordenadas cilíndricas (por la simetría del paraboloide) quedando la parametrización:

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

$$z = z$$

Para hallar los límites de las variables de integración recordamos que la cota superior del sólido es el plano ($z = 2x$) y la inferior es el paraboloide ($z = x^2 + y^2$). Sigue que el intervalo de z es $[\rho^2, 2\rho \cos(\phi)]$. Por otro lado, para hallar el intervalo de ρ graficamos en el plano xz la recta $z = 2x$ y la parábola $z = x^2$. La intersección de ambas curvas nos da el valor de ρ superior, mientras que la cota inferior es simplemente 0. En la siguiente figura ($y = 0$ para que se entienda mejor) se aprecia esto de mejor manera.

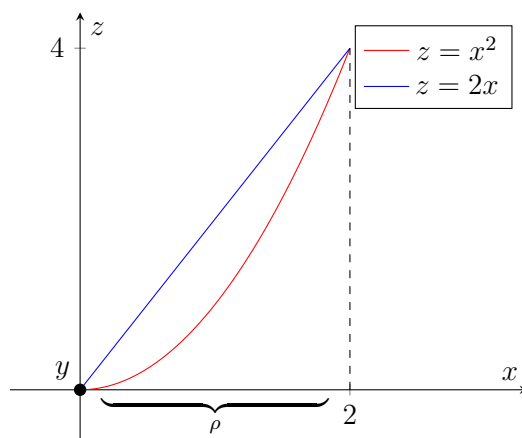


Figura 1: Región de integración en el plano xz .

Para hallar esta intersección igualamos las ecuaciones de las curvas y despejamos ρ :

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$\rho^2 = 2\rho \cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \rho = 2 \cos(\phi)$$

Por lo que el intervalo de ρ es $[0, 2 \cos(\phi)]$. Finalmente, el intervalo de ϕ es $[-\pi/2, \pi/2]$, debido a que el sólido se encuentra en la zona $x > 0$ (viendo el corte de la figura en el plano xz queda más claro esto). Utilizando el hecho que el jacobiano de la transformación a coordenadas cilíndricas

es ρ , la integral de volumen se puede calcular como

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\Omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\phi)} \int_{\rho^2}^{2\rho\cos(\phi)} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\phi)} [z]_{\rho^2}^{2\rho\cos(\phi)} \rho \, d\rho \, d\phi \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\phi)} (2\rho\cos(\phi) - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\phi \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}\rho^3\cos(\phi) - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^{2\cos(\phi)} d\phi \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{16}{3}\cos^4(\phi) - 4\cos^4(\phi) \right) d\phi \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3}\cos^4(\phi) d\phi \\
 &= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos^4(\phi)}_{=(\frac{1}{2}(1+\cos(2\phi)))^2} d\phi \\
 &= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\phi) + \frac{1}{4}\cos^2(2\phi) \right) d\phi \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Pregunta 2

Sea S la porción de paraboloides de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitado por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + 4\rho^2}}$$

- b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo.
- c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia en este dominio? Justifique su respuesta.
- d) Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$

Solución:

- a) Para encontrar la normal exterior, primero debemos parametrizar el manto del paraboloide. Dada la simetría del paraboloide, es conveniente hacer un cambio a coordenadas cilíndricas. La parametrización es

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), \rho^2 - 1), \quad \rho \in [1, \sqrt{a+1}], \phi \in [0, 2\pi]$$

Teniendo la parametrización el vector normal se calcula como

$$\hat{n} = \pm \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r} \right\|}$$

Donde el signo depende de la orientación de la normal. Como se busca la normal exterior a la superficie del paraboloide, se espera que tenga componente positiva en la dirección de $\hat{\rho}$ y negativa en $\hat{k}$. Calculando el producto cruz y normalizando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & 2\rho \\ -\rho \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\rho^2 \cos(\phi) \\ -2\rho^2 \sin(\phi) \\ \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde vemos que el vector obtenido tiene componente en z positiva, no negativa como se esperaría de la exterior. Multiplicando por -1 y sacando norma

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{(2\rho^2 \cos(\phi), 2\rho^2 \sin(\phi), -\rho)}{\rho \sqrt{1 + 4\rho^2}} \\ &= \frac{2\rho \hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + 4\rho^2}} \end{aligned}$$

Donde se utilizó que $\hat{\rho} = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)$.

- b) Calculemos el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo. Para ello debemos utilizar la

parametrización del paraboloide y la normal exterior obtenida en el inciso anterior.

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{a+1}} \vec{F} \cdot \hat{n} \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r} \right\| \, d\rho \, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{a+1}} \left(\frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan \left(\frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho^2} \right) \hat{\theta} \right) \cdot \left(\frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + 4\rho^2}} \right) \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{a+1}} \left(\frac{2\rho^2}{\rho} \right) \, d\rho \, d\phi \quad \text{/Ortogonalidad de cilíndricas} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{a+1}} 2\rho \, d\rho \, d\phi \\
&= 2\pi a
\end{aligned}$$

- c) Para aplicar el teorema de la divergencia en un dominio, este debe ser cerrado y sin huecos. En este caso, el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$ sí es cerrado, no obstante el campo no es C^1 , particularmente en el eje z donde $\rho = 0$ (ya que $F_\rho \propto \frac{1}{\rho}$). Sigue que no es posible aplicar el teorema de la divergencia en la región encerrada por S y los planos $z = 0$ y $z = a$.
- d) Para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$, podemos aplicar el teorema de la divergencia en el dominio encerrado por el cilindro, el paraboloide y los planos $z = 0$ y $z = a$. La divergencia del campo $\vec{F}$ es

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{F} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi) \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\arctan \left(\frac{z^2}{\rho^2} \right) \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y por lo tanto aplicando el teorema de la divergencia en la región Ω' encerrada por el cilindro, el paraboloide y los planos $z = 0$ y $z = a$ (acá se elimina el eje z donde $\rho = 0$, por lo tanto el campo es clase C^1 en Ω' y sí se puede aplicar el teorema) se tiene

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega'} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= \int_{\Omega'} \underbrace{\nabla \cdot \vec{F}}_{=0} \, dV \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde $\partial\Omega'$ es la unión de S , el manto del cilindro y las tapas. Dado que las normales exteriores de las tapas son $\pm \hat{z}$ y el campo $\vec{F}$ no tiene componente en z , el flujo a través de las tapas es nulo. Quedando así que el flujo a través del cilindro es igual al flujo a través

del paraboloido, que ya fue calculado en el inciso b):

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega'} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS &= 0 \\ \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS + \iint_{\text{cilindro}} \vec{F} \cdot \underbrace{\hat{n}}_{-\hat{\rho} \text{ exterior a } \Omega'} \, dS &= 0 \\ \Rightarrow \iint_{\text{cilindro}} \vec{F} \cdot \hat{\rho} \, dS &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = 2\pi a \quad / \text{ Por el inciso b) } \end{aligned}$$

Cabe aclarar que con este método el cálculo del flujo a través del cilindro es más sencillo que el cálculo sobre el paraboloido S , por lo que en vez de calcular directamente el flujo a través de S se podría haber calculado el flujo a través del cilindro y da el mismo resultado ($2\pi a$). Moraleja: ocupar teoremas (ya sea Stokes/Green o divergencia) simplifica los cálculos la mayoría de las veces.

Pregunta 3

- a) Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío y $g : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar C^2 . Muestre que

$$\operatorname{div}(g\nabla g) = g\Delta g + \|\nabla g\|^2 \quad \text{en } \mathbb{A}$$

- b) Considere el campo escalar h definido por $h(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Explique brevemente por qué es C^2 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

- c) Expresé h y ∇h en coordenadas esféricas.

Indicación: Recuerde que el operador ∇ en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

- d) Muestre que la derivada direccional $\frac{\partial h}{\partial \hat{r}}$ se anula en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Indicación: Para un campo escalar f se tiene la igualdad $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \nabla f \cdot \hat{u}$, en el dominio en el que f es C^1 , y para $\hat{u}$ vector unitario.

- e) Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Calcule

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h \, dV$$

Solución:

a) Para demostrar la identidad, primero calculemos la divergencia de $g\nabla g$:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(g\nabla g) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2}_{=\|\nabla g\|^2} + \underbrace{g \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right)}_{=g\Delta g} \\
 &= \|\nabla g\|^2 + g\Delta g
 \end{aligned}$$

b) Por álgebra y composición de funciones clase $C^2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, h es clase C^2 , ya que está compuesto por polinomios racionales que son clase C^∞ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, y raíces que también son clase C^2 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

c) Primero recordamos el cambio de coordenadas de cartesianas a esféricas:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\
 y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\
 z &= r \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

Por tanto $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$. Reemplazando

$$h(r, \theta, \phi) = \frac{r' \sin(\theta) \cos(\phi)}{r'} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

Por otro lado, el gradiente de h en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned}
 \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial h}{\partial \phi} \hat{\phi} \\
 &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \hat{\theta} - \frac{\sin(\phi)}{r} \hat{\phi}
 \end{aligned}$$

d) La derivada direccional de h en la dirección de $\hat{r}$ es (por la indicación)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial \hat{r}} &= \nabla h \cdot \hat{r} \\
 &= \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \hat{\theta} - \frac{\sin(\phi)}{r} \hat{\phi} \right) \cdot \hat{r} \\
 &= 0 \quad / \text{ Por ortogonalidad de coordenadas esféricas}
 \end{aligned}$$

e) Por (a) se tiene que

$$\operatorname{div}(h\nabla h) = h\Delta h + \|\nabla h\|^2$$

En $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$. Como $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 , es posible aplicar la siguiente igualdad para la integral a calcular

$$\iiint_{\Omega} h\Delta h \, dV = \underbrace{\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(h\nabla h) \, dV}_{=I_1} - \underbrace{\iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dV}_{=I_2}$$

Calculemos I_1 primero. Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto cuya frontera es $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ con $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$, y $h\Delta h$ campo C^2 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, en virtud del teorema de la divergencia se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(h\nabla h) \, dV \\ &= \iint_{\partial\Omega} h\nabla h \cdot \hat{n} \, dS \\ &= \iint_{S_1} h\nabla h \cdot \hat{r} \, dS + \iint_{S_2} h\nabla h \cdot \hat{r} \, dS \\ &= \iint_{S_1} h\nabla h \cdot (-\hat{r}) \, dS + \iint_{S_2} h\nabla h \cdot \hat{r} \, dS \\ &= - \iint_{S_1} h \underbrace{(\nabla h \cdot \hat{r})}_{=0} \, dS + \iint_{S_2} h \underbrace{(\nabla h \cdot \hat{r})}_{=0} \, dS \quad / \text{ Por parte (c)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{\Omega} \|\nabla h\|^2 \, dV \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\phi)}{r} \right)^2 \, dV \quad / \, dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\phi)}{r} \right)^2 \right) r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \cos^2 \phi \sin \theta + \sin^2 \phi \sin \theta) \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi}_{=\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_1^2 dr}_{=1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi}_{=\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta}_{=2/3} \underbrace{\int_1^2 dr}_{=1} \\ &= 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Y reemplazando en la igualdad inicial

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h \, dV = 0 - \frac{8\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}$$

Concluyendo el resultado.