

Auxiliar 4

Teorema de la divergencia

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sean

$$\vec{F}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2)^{3/2}, -x(x^2 + y^2)^{3/2}, z + 1)$$

y S la frontera de la región sólida acotada superiormente por el plano $z = 2x$ e inferiormente por el paraboloido $z = x^2 + y^2$. Calcular

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

Pregunta 2

Sea S la porción de paraboloido de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitado por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right) \hat{\theta}$$

a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + 4\rho^2}}$$

- b) Calcule el flujo del campo \vec{F} a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo.
- c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia en este dominio? Justifique su respuesta.
- d) Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$

Pregunta 3

a) Sea $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío y $g : \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar C^2 . Muestre que

$$\operatorname{div}(g\nabla g) = g\Delta g + \|\nabla g\|^2 \quad \text{en } \mathbb{A}$$

b) Considere el campo escalar h definido por $h(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Explique brevemente por qué es C^2 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

c) Expresé h y ∇h en coordenadas esféricas.

Indicación: Recuerde que el operador ∇ en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

d) Muestre que la derivada direccional $\frac{\partial h}{\partial \hat{r}}$ se anula en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Indicación: Para un campo escalar f se tiene la igualdad $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}} = \nabla f \cdot \hat{u}$, en el dominio en el que f es C^1 , y para \hat{u} vector unitario.

e) Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Calcule

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h dV$$

Teoremas fundamentales

Integral de línea: La integral de línea de una función $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre Γ , parametrizada por la función $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} d\tau$$

Propiedad: $\mathbf{F} = -\nabla g \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S , parametrizada por la función $\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_U \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (u, v) du dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\| du dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\mathbf{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Teorema de la divergencia (o Gauss): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 tal que $\Omega_0 \supseteq \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (2)$$

Análogamente a Stokes, en 2D el teorema de la divergencia toma la siguiente forma:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \nabla \cdot \mathbf{F} dS$$

lo cual para $\mathbf{F} = (P, Q)$

$$\oint_{\partial S} P dx - Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(prácticamente igual a Green).