Auxiliar 3

Campos conservativos y Teorema de Green

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto sobre la hélice parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ sometido a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{, donde } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Comente respecto a la conservatividad del campo $\mathbf{F}$. En caso de serlo encuentre una función escalar f que cumpla $\mathbf{F} = \nabla f$, ¿cómo se simplificaría el cálculo del trabajo?

Solución: El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de una curva $\boldsymbol{\gamma}$ se define como

$$W = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}'(t)dt$. Por lo tanto, el trabajo realizado al mover un objeto sobre la hélice parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ sometido a la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos(t), \sin(t), t)}{(\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2)} \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t) + t}{1 + t^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + t^2\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + 4\pi^2\right) \end{aligned}$$

Respecto a la conservatividad del campo $\mathbf{F}$, si encontramos una función escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces el campo es conservativo. Para encontrar esta función escalar, debemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se obtiene al igualar las componentes de $\mathbf{F}$ con las derivadas parciales de f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Sistema que se puede resolver integrando cada una de las variables. No obstante, pasando a coordenadas esféricas el cálculo se simplifica muchísimo. En efecto, considerando que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) = r\hat{\mathbf{r}}$ y que la componente radial del gradiente en coordenadas esféricas es $\nabla f \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial r}$, se tiene que

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad f = \ln(r) + C$$

Por lo que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo y una función escalar que cumple $\mathbf{F} = \nabla f$ es $f = \ln(r)$. Sigue que el trabajo se simplifica a

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(\boldsymbol{\gamma}(2\pi)) - f(\boldsymbol{\gamma}(0)) \\ &= \ln(\|(1,0,2\pi)\|) - \ln(\|(1,0,0)\|) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(1 + 4\pi^2\Big) \end{aligned}$$

Obteniendo el mismo resultado que en el cálculo anterior.

Pregunta 2

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

Dada una curva $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se define la integral de circulación como:

$$B(C) = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a) Bosqueje las siguientes curvas y calcule $B(C)$ para los siguientes casos:

1) C_1 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el origen, y cuyo sentido de recorrido es horario.

Solución: Consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y)\hat{\mathbf{j}},$$

donde

$$P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + y, \quad Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + x.$$

Esbozamos C_1:

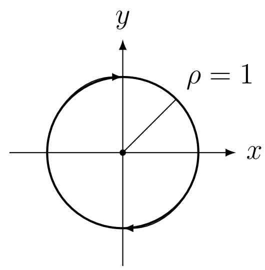

Figura 1: Esbozo de C_1.

Parametrizamos:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

donde $\theta \in [2\pi, 0]$ (recorrido en sentido horario).
Luego, es fácil mostrar que $P(\theta) = Q(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$. Por lo que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) + \cos(t))$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) + \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\cos(t)\sin(t)} + \cancel{\sin(t)\cos(t)} + \cos^2(t) - \sin^2(t))\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \sin^2(t))\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(2t)\ dt \\
&= 0 \quad \text{/ Dado que } \cos(2t) \text{ se integra en 2 veces el periodo.}
\end{aligned}$$

2) C_2 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el punto $x = 2$ e $y = 2$, y cuyo sentido de recorrido es antihorario.

Solución: Este problema es análogo al anterior, pero con un desplazamiento en el origen. Esbozamos C_2:

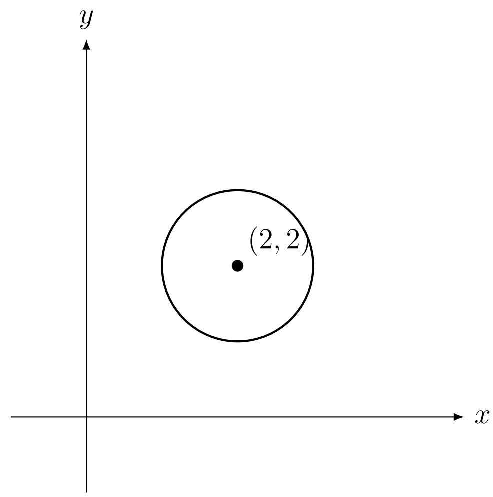

Figura 2: Esbozo de C_2.

No obstante debido al desplazamiento del centro de la circunferencia, el calcular por definición la integral de línea se hace un poco pesado desde el punto de vista de la matraca. Para solventar este tipo de problemas en el curso haremos uso de teoremas los que nos permitirán calcular integrales de línea de manera más eficiente. En este caso, el teorema de Green nos dice que

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

El cual tiene como hipotesis principal que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable en una región abierta que contiene a D (superficie encerrada por C_2) y C_2. En este caso, D es el disco de radio 1 centrado en $(2, 2)$, por lo que sí es posible aplicar el teorema de Green. Para ello, primero separamos $\mathbf{F}$ en sus componentes P y Q:

$$P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + y,$$
$$Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + x.$$

Luego, calculamos las derivadas parciales de P y Q:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por lo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 1 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Vemos que la resta de derivadas parciales es cero (esta resta es la componente z del rotacional de $\mathbf{F}$). Por lo que

$$\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{0} dA = 0.$$

3) C_3 es la frontera del triángulo cuyos vértices son $A_1 : \{x = 0, y = 3\}$, $A_2 : \{x = -4, y = -2\}$ y $A_3 : \{x = 4, y = -2\}$, recorrida dos veces en sentido antihorario.

Solución: Primero esbozamos C_3:

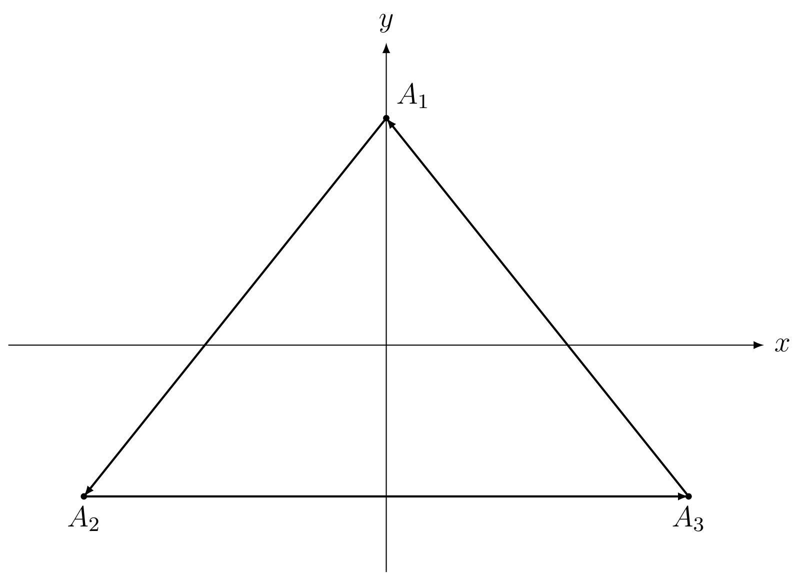

Figura 3: Esbozo de C_3.

Calcular por definición esta integral de línea, como en el item anterior, implica un trabajo tedioso (parametrizar cada una de las rectas, derivar estas parametrizaciones, evaluar el campo en parametrización, etc.). Para evitar este trabajo, aplicamos el teorema de Green. No obstante para aplicar este teorema necesitamos que el campo vectorial sea C^1 en la superficie que encierra C_3, lo que no se tiene pues en el punto (0,0) el campo explota (se divide por 0). En estos casos se aplica un pequeño truco, el cual es considerar un disco de radio 1 centrado en el origen (es decir C_1) y aplicar teorema de Green en la superificie formada entre la frontera exterior C_3 y la frontera interior C_1. Esta nueva superficie S la podemos ver en la siguiente figura:

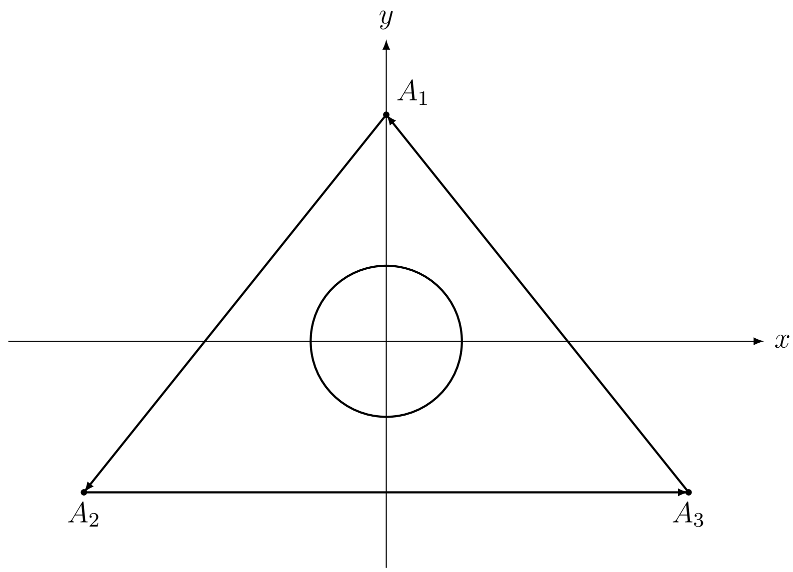

Figura 4: Superficie entre el triángulo y la circunferencia.

Y por lo tanto Green aplicado sobre S nos dice que

$$
\begin{aligned}
0 = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

La resta de la integral sobre C_1 viene de la aplicación de Green en regiones multiplemente conexas (curvas al interior se orientan horario). No obstane, ya calculamos la integral sobre C_1 en el item 1, por lo que

$$\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

b) Considere la curva D mostrada en la figura adjunta. Pruebe que existe una función escalar $g : \mathrm{Int}(D) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$ en $\mathrm{Int}(D)$. Entregue una expresión para la función escalar y deduzca el valor de $B(C)$ para toda curva $C \subset \mathrm{Int}(D)$.

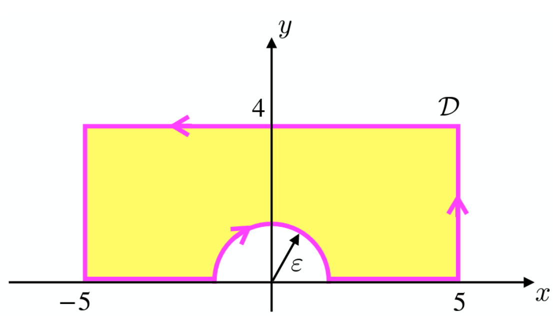

Figura 5: Esquema Pregunta 3(b).El radio $\epsilon \ll 1$, i.e., es muy pequeño.

Solución: Para encontrar la función escalar g tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$ en $\text{Int}(D)$, primero separamos $\mathbf{F}$ en sus componentes P y Q e igualamos a las componentes de $-\nabla g$:

$$P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + y = -\frac{\partial g}{\partial x},$$
$$Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + x = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Esto es una ecuación a derivadas parciales que se puede resolver mediante integración directa. No obstante al integrar respecto a una variable hay que tener el cuidado de no perder información, por lo que se debe considerar una constante de integración. En este caso, se puede considerar una constante de integración C que depende de la variable que no se está integrando. Por ejemplo, si se integra respecto a x, la constante de integración dependerá de y y viceversa. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} g(x,y) &= -\int P(x,y)dx + C(y) = -\int \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right) dx + C(y) \\ &= -\ln\left(x^2+y^2\right) + yx + C(y) = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - yx + C(y). \end{aligned}$$

Derivando respecto a y y comparando con $Q(x,y)$, se tiene que

$$-\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + xy + C'(y)$$

Lo que debe ser igual a $Q(x,y)$, por lo que $C'(y) = 0$ y $C(y) = C$. Por lo tanto, la función escalar g es

$$g(x,y) = -\ln\left(x^2+y^2\right) - yx + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Y como $\mathbf{F} = -\nabla g$, se tiene que para toda curva $C \subset \text{Int}(D)$

$$B(C) = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int dg = -\left[g(\mathbf{r}(b)) - g(\mathbf{r}(a))\right],$$

Dado que la curva es cerrada y g es continua en D, se tiene que $g(\mathbf{r}(b)) = g(\mathbf{r}(a))$ (punto inicial y final de la curva son el mismo), por lo que $B(C) = 0$.

c) ¿Existen diferencias entre las circulaciones calculadas en (a) y (b)? En caso de existir esas diferencias, ¿a qué se debe? En caso de no existir, ¿qué puede decirse sobre el campo $\mathbf{F}$? Justifique claramente su respuesta.

Solución: El cálculo de un campo g tal que $\mathbf{F} = -\nabla g$ implica que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo. Esto tiene como consecuencia que la integral de circulación de $\mathbf{F}$ sobre cualquier curva cerrada es cero. Por lo tanto, las circulaciones calculadas en (a) y (b) son iguales y ambas son cero.

Pregunta 3

Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla^2 f = 0$ sobre el disco centrado en el origen de radio $r > 0$. Demuestre que $f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, d\theta$ mediante los siguientes pasos:

a) Primero: Considere Γ_r la circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y definiendo $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$. Verifique que $r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$, donde $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

b) Segundo: Use lo obtenido en el paso anterior para asegurar que φ es constante, y estudie $\lim_{r\to 0^+}\varphi(r)$ para concluir el resultado.

Solución:

a) Primero, utilizamos la regla de la cadena para obtener la derivada de $\varphi(r)$. Sabemos que:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$$

Derivando con respecto a r, usando la regla de Leibniz y teniendo en cuenta que f depende de $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, por regla de la cadena se cumple que

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)}{\partial r}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\theta
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por r, obtenemos:

$$r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\theta$$

Esta expresión puede ser interpretada como una integral de línea a lo largo de la circunferencia Γ_r de radio r, pues Γ_r se parametriza por $\mathbf{r}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \Rightarrow \mathbf{r}'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$. Por definición de integral de línea entonces se cumple que $d\mathbf{x} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)d\theta$, sigue que:

$$r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x}$$

Con $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

b) Ahora, aplicamos el Teorema de Green para convertir esta integral de línea en una integral doble. Según el Teorema de Green, para un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$, donde $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$, tenemos:

$$\int_{\Gamma_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{D_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Como $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ y $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$, se sigue que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Dado que f satisface la ecuación de Laplace, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en el disco D_r, concluimos que:

$$r\varphi'(r) = \int_{D_r} 0\, dx\, dy = 0$$

Por lo tanto, $r\varphi'(r) = 0$, lo que implica que $\varphi'(r) = 0$ para $r > 0$. Esto nos dice que $\varphi(r)$ es constante para $r > 0$.

Finalmente, calculamos el límite de $\varphi(r)$ cuando $r \to 0^+$. Sabemos que $\varphi(r)$ es constante para $r > 0$, por lo que podemos evaluar este límite tomando $r = 0$. Usamos la definición original de $\varphi(r)$:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0,0)\, d\theta = f(0,0)$$

De este modo, concluimos que:

$$\lim_{r \to 0^+} \varphi(r) = f(0,0)$$

Por lo tanto, se ha obtenido el resultado solicitado: $\varphi(r) = f(0,0)$.

Pregunta 4

Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$, calcule:

$$I = \iint_S \frac{x^2}{z} dA$$

Solución: Siempre es bueno partir por visualizar gráficamente la superficie. Hacer esto no siempre es fácil, pero en este caso es sencillo debido a que la superficie es un paraboloide, figura conocida y que no es dificil esbozar su forma geométrica. En la figura 6 se se puede visualizar

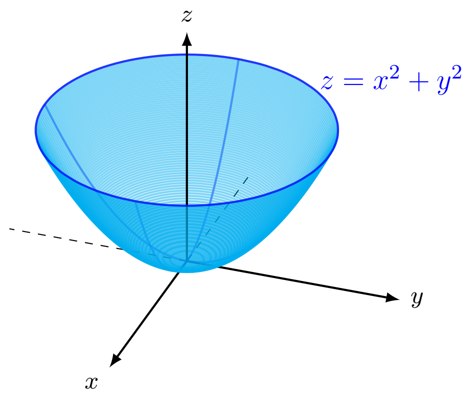

Figura 6: Superficie S dada por $z = x^2 + y^2, \ z \leq 1$.

Ahora hay que parametrizarla, lo que se puede hacer definiendo $\mathbf{r}(\rho, \phi) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi), \rho^2)$ con $\rho \in [0, 1]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. La elección de coordenadas polares para las componentes x e y viene dado por el término $x^2 + y^2$ en la ecuación que define a la superficie. Como en coordenadas polares $x^2 + y^2 = \rho^2$ y la ecuación del paraboloide es $x^2 + y^2 = z$ entonces se fija $z = \rho^2$. Teniendo la función que parametriza, el elemento de área dA se puede expresar como (ver formulario)

$$dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| d\rho d\phi$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= (\cos(\phi), \sin(\phi), 2\rho) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (-\rho\sin(\phi), \rho\cos(\phi), 0) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (2\rho^2\cos(\phi), 2\rho^2\sin(\phi), \rho) \end{aligned}$$

Sacando la norma del producto cruz

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = \sqrt{4\rho^4\cos^2(\phi) + 4\rho^4\sin^2(\phi) + \rho^2} = \sqrt{4\rho^4 + \rho^2} = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}$$

Reemplazando en la expresión de dA, se tiene que

$$dA = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} \ d\rho d\phi$$

Por lo tanto, el valor de la integral I se puede expresar como

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2\cos^2(\phi)}{\rho^2}\rho\sqrt{4\rho^2+1}d\rho d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\phi)\rho\sqrt{4\rho^2+1}d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{12}(5^{3/2}-1)\int_0^{2\pi}\cos^2(\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{12}(5^{3/2}-1)\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\phi)}{2}d\phi \\
&= \frac{1}{12}(5^{3/2}-1)\left[\frac{\phi}{2}+\frac{\sin(2\phi)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{12}(5^{3/2}-1)\pi
\end{aligned}
$$