Auxiliar 3

Campos conservativos y Teorema de Green

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto sobre la hélice parametrizada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ sometido a la fuerza

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \quad ,\text{donde } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Comente respecto a la conservatividad del campo $\vec{F}$. En caso de serlo encuentre una función escalar f que cumpla $\vec{F} = \nabla f$, ¿cómo se simplificaría el cálculo del trabajo?

Pregunta 2

Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)\hat{\mathbf{j}}.$$

Dada una curva $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se define la integral de circulación como:

$$B(C) = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

a) Bosqueje las siguientes curvas y calcule $B(C)$ para los siguientes casos:

   1) C_1 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el origen, y cuyo sentido de recorrido es horario.

   2) C_2 es la circunferencia de radio $\rho = 1$, centrada en el punto $x = 2$ e $y = 2$, y cuyo sentido de recorrido es antihorario.

   3) C_3 es la frontera del triángulo cuyos vértices son $A_1 : \{x = 0, y = 3\}$, $A_2 : \{x = -4, y = -2\}$ y $A_3 : \{x = 4, y = -2\}$, recorrida dos veces en sentido antihorario.

b) Considere la curva D mostrada en la figura adjunta. Pruebe que existe una función escalar $g : \text{Int}(D) \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = -\nabla g$ en $\text{Int}(D)$. Entregue una expresión para la función escalar y deduzca el valor de $B(C)$ para toda curva $C \subset \text{Int}(D)$.

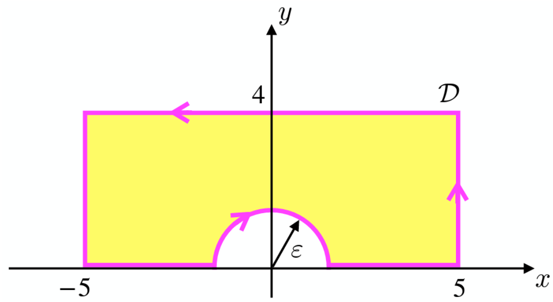

Figura 1: Esquema Pregunta 3(b). El radio $\epsilon \ll 1$, i.e., es muy pequeño.

c) ¿Existen diferencias entre las circulaciones calculadas en (a) y (b)? En caso de existir esas diferencias, ¿a qué se debe? En caso de no existir, ¿qué puede decirse sobre el campo $\vec{F}$? Justifique claramente su respuesta.

Pregunta 3

Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla^2 f = 0$ sobre el disco centrado en el origen de radio $r > 0$. Demuestre que $f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, d\theta$ mediante los siguientes pasos:

a) Primero: Considere Γ_r la circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y definiendo $\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$. Verifique que $r\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \vec{F}\cdot d\vec{x}$, donde $\vec{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

b) Segundo: Use lo obtenido en el paso anterior para asegurar que φ es constante, y estudie $\lim_{r\to 0^+} \varphi(r)$ para concluir el resultado.

Pregunta 4

Para la superficie S dada por $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$, calcule:

$$I = \iint_S \frac{x^2}{z} dA$$

Resumen

Integral de línea: La integral de línea de una función $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}\, d\tau$$

Propiedad: $\vec{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Campos conservativos: Sea $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ un campo vectorial continuo sobre un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^3$. Entonces, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(i) El campo $\vec{F}$ es conservativo en Ω.

(ii) Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(iii) El campo $\vec{F}$ se puede representar como el gradiente de una función escalar, es decir, existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Proposición importante: Sea $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1. Supongamos que Ω es estrellado. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \iff \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \Omega.$$

Integral de flujo: La integral de flujo de una función $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre S, parametrizada por la función $\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se representa por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{\vec{n}}\, dS = \iint_U \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u,v)\, du\, dv$$

donde $dS = \left\| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \right\| du\, dv$.

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde $\Gamma = \partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $\vec{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathbb{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \tag{1}$$

donde Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{\vec{n}}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Teorema de Green (Stokes 2D): Aplicando el Teorema de Stokes para $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\vec{F} : \Lambda \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ entonces

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$