

Auxiliar 2

Integrales de línea y sistemas de coordenadas ortogonales

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Encuentre una parametrización para las siguientes curvas (todas recorridas en sentido antihorario):

- a) La parábola dada por $y = x^2$, con $x \in [0, a]$, $a > 0$.
- b) Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.
- c) Una elipse centrada en el origen con semiejes a y b en el plano $z = 2$.
- d) La curva que resulta de la intersección entre el manto cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y el plano $y + z - 2 = 0$.

Solución:

- a) La parábola $y = x^2$ con $x \in [0, a]$ se puede parametrizar como

$$\begin{aligned}x(t) &= t, & t \in [0, a], \\y(t) &= t^2, & t \in [0, a].\end{aligned}$$

Esta parametrización se elige porque simplemente dejamos que t sea el valor de x y expresamos y en términos de t usando la ecuación de la parábola.

- b) El triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante tiene vértices en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Las parametrizaciones de los lados del triángulo son:

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{P}_i + t\vec{P}_f, \quad t \in [0, 1]$$

- i) Desde $(1, 0, 0)$ hasta $(0, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 - t, \\y(t) &= t, \\z(t) &= 0.\end{aligned}$$

- ii) Desde $(0, 1, 0)$ hasta $(0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= 0, \\y(t) &= 1 - t, \\z(t) &= t.\end{aligned}$$

iii) Desde $(0, 0, 1)$ hasta $(1, 0, 0)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= t, \\y(t) &= 0, \\z(t) &= 1 - t.\end{aligned}$$

c) La elipse centrada en el origen con semiejes a y b en el plano $z = 2$ se puede parametrizar como

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\y(t) &= b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\z(t) &= 2, \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Esta parametrización se elige porque es estándar para una elipse (satisface la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ para todo t), donde t es el ángulo que varía de 0 a 2π , y z es constante en 2.

d) La curva que resulta de la intersección entre el manto cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y el plano $y + z - 2 = 0$ se puede parametrizar como

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\y(t) &= \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\z(t) &= 2 - \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Esta parametrización se elige porque x y y describen un círculo en el plano $z = 0$, y z varía linealmente con y debido a la ecuación del plano.

Pregunta 2

Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{d\theta} = z, \quad z(0) = h$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

a) Bosqueje la curva.

b) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2} \right).$$

Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ .

Solución:

a) La curva Γ se encuentra sobre la superficie definida por $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$, ecuación que describe a un cono circular recto. La altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dz}{d\theta} = z$, con $z(0) = h$. La solución a esta ecuación diferencial es $z(\theta) = he^\theta$, que describe una espiral que

se aleja del eje z a medida que θ aumenta. La forma de la curva se muestra en la siguiente figura.

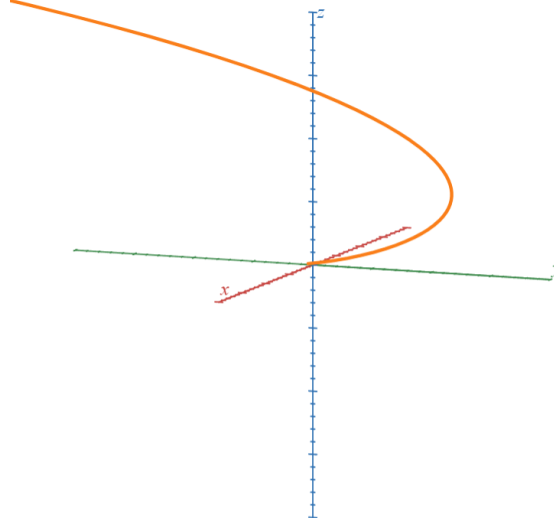


Figura 1: Curva Γ con $t \in [0, 2\pi]$ y $h = 1$.

- b) Para calcular el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ , primero debemos parametrizar la curva Γ_0 . La restricción de Γ a $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ se puede parametrizar como:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \cos(t), & t &\in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \\ y(t) &= e^t \sin(t), & t &\in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \\ z(t) &= he^t, & t &\in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

La razón de esta elección viene de la solución a la ecuación diferencial $z(\theta) = he^\theta$, donde $\theta = t$ y $z = he^t$, y de la ecuación de la superficie $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$, que reemplazando con el z obtenido de la ecuación diferencial queda como $x^2 + y^2 = (e^t)^2$. Reconocemos esta última ecuación como la de una circunferencia de radio e^t en el plano $z = he^t$. Teniendo la parametrización de Γ_0 , el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ es

$$W = \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Calculamos $\vec{r}'(t)$ y $\vec{F}(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)), he^t), \\ \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) &= \left(\frac{1}{e^t \cos(t)}, \frac{1}{e^t \sin(t)}, -\frac{1}{(he^t)^2} \right). \end{aligned}$$

Luego, el trabajo es

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{e^t \cos t}, \frac{1}{e^t \sin t}, -\frac{1}{(he^t)^2} \right) \cdot (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), he^t) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t} + \frac{\sin t + \cos t}{\sin t} - \frac{1}{he^t} \right) dt \quad (\text{Producto punto simplificado}) \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \tan t + 1 + \cot t - \frac{1}{he^t} \right) dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 + \cot t - \tan t - \frac{1}{he^t} \right) dt \\
&= \left[2t + \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \frac{1}{he^t} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \quad (\text{Integrales estándar}) \\
&= \left(\frac{2\pi}{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{he^{\pi/3}} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{he^{\pi/6}} \right) \quad (\text{Evaluación}) \\
&= \frac{\pi}{3} + \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{h} (e^{-\pi/3} - e^{-\pi/6}) \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{h} (e^{-\pi/3} - e^{-\pi/6})
\end{aligned}$$

Pregunta 3

Se definen las coordenadas (ϵ, η, ϕ) como sigue

$$\begin{aligned}
x &= \epsilon \eta \cos(\phi), \\
y &= \epsilon \eta \sin(\phi), \\
z &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)
\end{aligned}$$

donde $\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

- Calcule los factores de escala asociados a (ϵ, η, ϕ) . ¿Es un sistema de coordenadas ortogonal?
- Expresé el operador Gradiente en este sistema de coordenadas para un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 .
- Demuestre que el operador Laplaciano en este sistema de coordenadas se puede escribir como sigue

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\epsilon^2 + \eta^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\eta^2 \epsilon^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 .

Solución:

- a) Para calcular los factores de escala asociados a (ϵ, η, ϕ) , primero recordamos que los factores de escala se definen como

$$h_{q_i} = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $\vec{r} = (\epsilon \eta \cos(\phi), \epsilon \eta \sin(\phi), \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2))$ y $q_i = \{\epsilon, \eta, \phi\}$. Por lo tanto los factores de escala son:

$$h_\epsilon = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon} \right\| = \|\eta \cos(\phi), \eta \sin(\phi), -\epsilon\| = \sqrt{\eta^2 + \epsilon^2},$$

$$h_\eta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\| = \|\epsilon \cos(\phi), \epsilon \sin(\phi), \eta\| = \sqrt{\eta^2 + \epsilon^2},$$

$$h_\phi = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = \|- \epsilon \eta \sin(\phi), \epsilon \eta \cos(\phi), 0\| = \epsilon \eta.$$

Para corroborar si el sistema de coordenadas es ortogonal, calculamos el producto punto entre los vectores unitarios de cada coordenada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} &= (\eta \cos \phi)(\epsilon \cos \phi) + (\eta \sin \phi)(\epsilon \sin \phi) + (-\epsilon)(\eta) \\ &= \epsilon \eta \cos^2 \phi + \epsilon \eta \sin^2 \phi - \epsilon \eta \\ &= \epsilon \eta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \epsilon \eta = \epsilon \eta - \epsilon \eta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= (\eta \cos \phi)(-\epsilon \eta \sin \phi) + (\eta \sin \phi)(\epsilon \eta \cos \phi) + (-\epsilon)(0) \\ &= -\epsilon \eta^2 \cos \phi \sin \phi + \epsilon \eta^2 \sin \phi \cos \phi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= (\epsilon \cos \phi)(-\epsilon \eta \sin \phi) + (\epsilon \sin \phi)(\epsilon \eta \cos \phi) + (\eta)(0) \\ &= -\epsilon^2 \eta \cos \phi \sin \phi + \epsilon^2 \eta \sin \phi \cos \phi = 0. \end{aligned}$$

Conclusión: Todos los productos punto son cero. Por lo tanto, el sistema de coordenadas (ϵ, η, ϕ) es ortogonal. $\boxed{h_\epsilon = h_\eta = \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2}, h_\phi = \epsilon \eta}$

- b) En un sistema de coordenadas ortogonales, el gradiente de un campo escalar f se expresa como:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_{q_i}} \frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{e}_{q_i},$$

donde $\{q_i\} = \{\epsilon, \eta, \phi\}$ y h_{q_i} son los factores de escala previamente calculados. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{h_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \hat{e}_\epsilon + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{e}_\eta + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \hat{e}_\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{e}_\eta + \frac{1}{\epsilon \eta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi. \end{aligned}$$

c) Partimos de la definición del Laplaciano como la divergencia del gradiente:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Usando el gradiente obtenido previamente:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \hat{e}_\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \eta^2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{e}_\eta + \frac{1}{\epsilon \eta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi,$$

y la fórmula general de la divergencia en coordenadas ortogonales:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_\epsilon h_\eta h_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} (h_\eta h_\phi F_\epsilon) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\epsilon h_\phi F_\eta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (h_\epsilon h_\eta F_\phi) \right],$$

sustituimos $\vec{F} = \nabla f$:

- Término en ϵ :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(h_\eta h_\phi \cdot \frac{1}{h_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\epsilon \eta \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right).$$

$$- h_\eta h_\phi / h_\epsilon = \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2} \cdot \epsilon \eta / \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2} = \epsilon \eta.$$

- Término en η :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\epsilon h_\phi \cdot \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\epsilon \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right).$$

$$- h_\epsilon h_\phi / h_\eta = \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2} \cdot \epsilon \eta / \sqrt{\epsilon^2 + \eta^2} = \epsilon \eta.$$

- Término en ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left(h_\epsilon h_\eta \cdot \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\epsilon^2 + \eta^2}{\epsilon \eta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

$$- h_\epsilon h_\eta / h_\phi = (\epsilon^2 + \eta^2) / (\epsilon \eta).$$

Simplificación final: Dividiendo por $h_\epsilon h_\eta h_\phi = (\epsilon^2 + \eta^2) \epsilon \eta$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{(\epsilon^2 + \eta^2) \epsilon \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\epsilon \eta \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\epsilon \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{(\epsilon^2 + \eta^2) \epsilon \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\epsilon^2 + \eta^2}{\epsilon \eta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2 + \eta^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\epsilon^2 \eta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

Pregunta 4

Considere la función

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

a) Escriba la función f en coordenadas esféricas.

b) Calcule el laplaciano de f en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

c) Determine el campo $\vec{E} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface $\vec{E} = -\nabla f$. Luego calcule explícitamente

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

donde C es la circunferencia descrita por $x^2 + y^2 = a$, con $z = 0$ y $a > 0$, recorrida en sentido antihorario. ¿Es $\mathbf{E}$ conservativo en Ω ?

Solución:

a) Para escribir f en coordenadas esféricas, primero recordamos la relación entre coordenadas cartesianas y esféricas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Por lo tanto, f en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \phi) &= \frac{\alpha r \cos \theta}{r^3} \\ &= \frac{\alpha \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

b) Para calcular el laplaciano de f en coordenadas esféricas recordamos que $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. Por lo tanto, primero calculamos el gradiente de f en coordenadas esféricas (también se puede hacer con formula de laplaciano que en controles generalmente dan, no obstante debido a que en las preguntas que vienen preguntan por $\vec{E}$ es más conveniente hacerlo de esta forma):

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} - \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Calculamos ahora la divergencia de ∇f en coordenadas esféricas (f no depende de ϕ por lo que $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$)

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Calculemos por partes los términos de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= -2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \Rightarrow r^2 \frac{\partial f}{\partial r} = -2\alpha \frac{\cos \theta}{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= -2\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) = 2\alpha \frac{\cos \theta}{r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \Rightarrow \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\alpha \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) = -\alpha \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de $\nabla^2 f$:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(-\alpha \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(2\alpha \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{2\alpha \cos \theta}{r^2} + \frac{2\alpha \cos \theta}{r^2} = 0\end{aligned}$$

c) Como ya calculamos ∇f , el campo $\vec{E}$ que satisface $\vec{E} = -\nabla f$ es

$$\vec{E} = 2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Para calcular la integral de $\vec{E}$ sobre C , primero parametrizamos C en coordenadas esféricas (ya que el campo está en coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned}\vec{r}(\phi) &= a \hat{\mathbf{r}}(\phi, \theta = \pi/2) \\ \Rightarrow \vec{r}'(\phi) &= a \frac{d}{d\phi} (\hat{\mathbf{r}}(\phi, \theta = \pi/2))\end{aligned}$$

Ahora recordamos que $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ y por lo tanto derivado con respecto a ϕ y evaluando $\theta = \pi/2$ (ya que estamos en el plano $z = 0$) obtenemos:

$$\vec{r}'(\phi) = a(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

Y como $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, entonces $\vec{r}'(\phi) = a\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Por lo tanto, la integral de $\vec{E}$ sobre C

es

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{E} \cdot \vec{r}'(\phi) \, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2\alpha \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot a \hat{\boldsymbol{\phi}} \, d\phi \\
&= 0 \quad / \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0
\end{aligned}$$

Respecto a la conservatividad de $\vec{E}$, como $\vec{E} = -\nabla f$ en Ω y la curva C no pasa por el origen, entonces $\vec{E}$ es conservativo en Ω (caracterización de campos conservativos). Por otro lado, el teorema de Stokes no se puede aplicar en este caso ya que la curva C encierra el origen, punto en el cual $\vec{E}$ no es clase C^1 .