Auxiliar 2

Integrales de línea y sistemas de coordenadas ortogonales

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Encuentre una parametrización para las siguientes curvas (todas recorridas en sentido antihorario):

a) La parábola dada por $y = x^2$, con $x \in [0, a]$, $a > 0$.

b) Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.

c) Una elipse centrada en el origen con semiejes a y b en el plano $z = 2$.

d) La curva que resulta de la intersección entre el manto cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y el plano $y + z - 2 = 0$.

Pregunta 2

Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}$, de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{d\theta} = z, \quad z(0) = h$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

a) Bosqueje la curva.

b) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right).$$

Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ.

Pregunta 3

Se definen las coordenadas (ϵ, η, ϕ) como sigue

$$\begin{aligned} x &= \epsilon\eta\cos(\phi), \\ y &= \epsilon\eta\sin(\phi), \\ z &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2) \end{aligned}$$

donde $\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

a) Calcule los factores de escala asociados a (ϵ, η, ϕ). ¿Es un sistema de coordenadas ortogonal?

b) Exprese el operador Gradiente en este sistema de coordenadas para un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

c) Demuestre que el operador Laplaciano en este sistema de coordenadas se puede escribir como sigue

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\epsilon^2 + \eta^2}\left(\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\epsilon\frac{\partial f}{\partial \epsilon}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\right) + \frac{1}{\eta^2\epsilon^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2.

Pregunta 4

Considere la función

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

a) Escriba la función f en coordenadas esféricas.

b) Calcule el laplaciano de f en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

c) Determine el campo $\vec{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ que satisface $\vec{E} = -\nabla f$. Luego calcule explícitamente

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

donde C es la circunferencia descrita por $x^2 + y^2 = a$, con $z = 0$ y $a > 0$, recorrida en sentido antihorario. ¿Es $\vec{E}$ conservativo en Ω?

Coordenadas ortogonales

Sistema de coordenadas curvilíneas: Sea $\vec{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable e invertible tal que a cada $(u, v, w) \in D$ le corresponde un punto $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3$.

Sistema ortogonal: Sea $\vec{R}$ un sistema de coordenadas. Se dice que $\vec{R}$ es ortogonal si los vectores

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u}, \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}, \quad \vec{w} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial w},$$

son mutuamente ortogonales.

Factores escalares:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial w} \right\|.$$

Representación de un campo vectorial en otro sistema: Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, Ω abierto y $\vec{R}$ un sistema de coordenadas. Se define:

$$F_u = F_u(u, v, w) = \vec{F}(\vec{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\vec{u}}(u, v, w),$$

$$F_v = F_v(u, v, w) = \vec{F}(\vec{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\vec{v}}(u, v, w),$$

$$F_w = F_w(u, v, w) = \vec{F}(\vec{R}(u, v, w)) \cdot \hat{\vec{w}}(u, v, w).$$

Se tiene que $\vec{F} = F_u \cdot \hat{\vec{u}} + F_v \cdot \hat{\vec{v}} + F_w \cdot \hat{\vec{w}}$.

Algunos sistemas de coordenadas

- Coordenadas cilíndricas: $\vec{R}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$.
- Coordenadas esféricas: $\vec{R}(r, \theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales:

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} := \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v) \right)$$

- Rotor:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \det \begin{pmatrix} h_u \hat{\vec{u}} & h_v \hat{\vec{v}} & h_w \hat{\vec{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{pmatrix}$$

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\vec{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\vec{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\vec{w}}$$

Intregal de línea y campos conservativos

Integral de línea: La integral de línea de una función $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre Γ, parametrizada por la función $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ se calcula como

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}\, d\tau$$

Propiedad: $\vec{F} = -\nabla g \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Campos conservativos: Sea $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ un campo vectorial continuo sobre un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^3$. Entonces, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(i) El campo $\vec{F}$ es conservativo en Ω.

(ii) Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(iii) El campo $\vec{F}$ se puede representar como el gradiente de una función escalar, es decir, existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Proposición importante: Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1. Supongamos que Ω es estrellado. Entonces:

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } \Omega \iff \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \Omega.$$