Auxiliar 1

Operadores diferenciales y líneas de flujo

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos vectoriales y escalares suaves, respectivamente. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

b) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$

c) $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

d) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Solución:

a) Por demostrar que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$. Considerando que ∇ se interpreta como el operador diferencial $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(fg) \\
&= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad \text{/ Regla de Leibniz o multiplicación} \\
&= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\nabla g + g\nabla f
\end{aligned}$$

b) Por demostrar que $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$. Sacando la divergencia de $f\vec{F}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f\vec{F}) &= \nabla \cdot (fF_1, fF_2, fF_3) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= f\frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial F_3}{\partial z} + F_3\frac{\partial f}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \left(F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f
\end{aligned}$$

c) Por demostrar que $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$. Considerando que $\nabla\times$ es el operador rotor, entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\vec{F}) &= \nabla \times (fF_1, fF_2, fF_3) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fF_1 & fF_2 & fF_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(fF_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fF_2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(fF_1) - \frac{\partial}{\partial x}(fF_3) \\ \frac{\partial}{\partial x}(fF_2) - \frac{\partial}{\partial y}(fF_1) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} f\frac{\partial F_3}{\partial y} - F_3\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial F_2}{\partial z} + F_2\frac{\partial f}{\partial z} \\ f\frac{\partial F_1}{\partial z} - F_1\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial F_3}{\partial x} + F_3\frac{\partial f}{\partial x} \\ f\frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial F_1}{\partial y} + F_1\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}^T \\
&= f\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} F_3\frac{\partial f}{\partial y} - F_2\frac{\partial f}{\partial z} \\ F_1\frac{\partial f}{\partial z} - F_3\frac{\partial f}{\partial x} \\ F_2\frac{\partial f}{\partial x} - F_1\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}^T \\
&= f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}
\end{aligned}$$

d) Por demostrar que $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$. Considerando que ∇^2 es el operador laplaciano, entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(fg) &= \nabla \cdot \nabla(fg) \\
&= \nabla \cdot (f\nabla g + g\nabla f) \\
&= \nabla \cdot (f\nabla g) + \nabla \cdot (g\nabla f) \\
&= f\nabla \cdot \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g + g\nabla \cdot \nabla f + \nabla g \cdot \nabla f \\
&= f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g
\end{aligned}$$

e) Por demostrar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla f) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}^T \quad / \text{ Teorema de Clairaut-Schwarz} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde se aplicó el teorema de Clairaut-Schwarz, el cual dice que si las segundas derivadas parciales de una función son continuas en un entorno abierto de un punto (funciones clase C^2), entonces el orden de derivación no importa, i.e. las derivadas cruzadas son iguales.

f) Por demostrar que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Como asumimos que f es clase C^2, entonces las derivadas cruzadas son iguales, por lo que:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pregunta 2

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (-z, y, x)$, responda justificando las siguientes preguntas:

- ¿Existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$?
- ¿Existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$?

Solución:

a) Por (e) de la pregunta 2, sabemos que $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Por lo tanto, si $\nabla f = \vec{F}$, entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$, lo cual no se cumple llegando a una contradicción. Verificando:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z & y & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-z) - \frac{\partial}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(-z) \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}^T \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, no existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

b) Similarmente, por (f) de la pregunta 2, sabemos que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$. Por lo tanto, si $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$, entonces $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, lo cual no se cumple llegando a una contradicción. Verificando:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{F} &= \nabla \cdot (-z, y, x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(-z) + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} x \\
&= 0 + 1 + 0 \\
&= 1 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Sigue que no existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$.

Pregunta 3

a) Demuestre la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F},$$

y utilícela para demostrar que los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en el vacío satisfacen la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}, \quad \text{con } \vec{\Psi} = \vec{E} \text{ o } \vec{B}.$$

Incluya en su desarrollo las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

b) Considere las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u},$$

donde $\vec{u}$ es el campo de velocidades, ρ la densidad, p la presión y ν la viscosidad cinemática. Demuestre que la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ satisface la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}.$$

Indicación: Use la identidad $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$.

Solución:

a) Sea $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Calculamos $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$ en coordenadas cartesianas. El rotacional de $\vec{F}$ es:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Aplicando nuevamente el rotacional, la componente x de $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$ es:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right).$$

Simplificando y agrupando términos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right).$$

Esto corresponde a la componente x de $\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$. Repitiendo el proceso para las componentes y y z, se verifica la identidad:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$$

Aplicación a las ecuaciones de Maxwell en el vacío ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$):

- Campo eléctrico $\vec{E}$: De la ley de Faraday ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$), tomamos el rotacional:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Usando la identidad demostrada y $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (ley de Gauss), se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$
$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Sustituyendo la ley de Ampère ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$):

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

- Campo magnético $\vec{B}$: De la ley de Ampère ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$), tomamos el rotacional:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Usando la identidad y $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (ley de Gauss para magnetismo):

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}).$$

Sustituyendo la ley de Faraday ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$):

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Por lo tano $\vec{E}$ como $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de onda:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\Psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}, \quad \vec{\Psi} = \vec{E}, \vec{B}},$$

con velocidad de propagación $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

b) Partimos de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}.$$

Aplicando el rotacional a ambos lados y definiendo la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + \nabla \times ((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{u}).$$

Simplificando:

- $\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ (intercambio de derivadas).
- $\nabla \times (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}$ (rotacional de un producto).

- $\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0$ (rotacional de un gradiente es nulo).
- $\nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{u}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$ (conmutación de Laplaciano y rotacional).

Para el término no lineal, usamos la identidad $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$ con $\vec{A} = \vec{u}$ y $\vec{B} = \vec{u}$:

$$\nabla \times ((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u},$$

donde se usó $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ (divergencia de un rotacional).

Reuniendo todos los términos:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}}$$

Esta es la ecuación de transporte de vorticidad, que describe la evolución de $\vec{\omega}$ debido a la advección, estiramiento/vorticidad y difusión viscosa.

Pregunta 4

Dado el campo de velocidad estacionario:

$$\vec{u}(x, y) = x\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath},$$

encuentre las ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales asociado.

Solución: Las líneas de flujo son las trayectorias que sigue una partícula fluida en un instante de tiempo dado. Estas líneas cumplen la ecuación diferencial:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}(\vec{r}),$$

donde $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ es la posición de la partícula en función de la longitud de arco s. Para el campo de velocidad dado:

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dy}{ds} = -y.$$

Estas ecuaciones diferenciales son desacopladas y se resuelven fácilmente:

$$\frac{dx}{x} = ds, \quad \frac{dy}{-y} = ds,$$

$$\ln|x| = s + C_1, \quad \ln|y| = -s + C_2,$$

$$x = C_1 e^s, \quad y = C_2 e^{-s}.$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales de la

partícula. Las líneas de flujo son entonces:

$$x(s) = C_1 e^s,$$
$$y(s) = C_2 e^{-s}.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo para el campo de velocidad dado. Multiplicando $x(s)$ y $y(s)$ se obtiene la ecuación de las líneas de flujo en coordenadas cartesianas:

$$xy = C_1 C_2.$$

Y despejando y se obtiene:

$$y = \frac{C_1 C_2}{x} = \frac{K}{x},$$

Evidencia de que las líneas de flujo son hipérbolas.