FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1

Operadores diferenciales y líneas de flujo

Profesor: Víctor Ramos
Auxiliar: Bruno Pollarolo

Pregunta 1

Sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos vectoriales y escalares suaves, respectivamente. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

b) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$

c) $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

d) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

e) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

f) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Pregunta 2

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (-z, y, x)$, responda justificando las siguientes preguntas:

- ¿Existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$?
- ¿Existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$?

Pregunta 3

a) Demuestre la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F},$$

y utilícela para demostrar que los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ en el vacío satisfacen la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}, \quad \text{con } \vec{\Psi} = \vec{E} \text{ o } \vec{B}.$$

Incluya en su desarrollo las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

b) Considere las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u},$$

donde $\vec{u}$ es el campo de velocidades, ρ la densidad, p la presión y ν la viscosidad cinemática. Demuestre que la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ satisface la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}.$$

Indicación: Use la identidad $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$.

Pregunta 4

Dado el campo de velocidad estacionario:

$$\vec{u}(x, y) = x\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath},$$

encuentre las ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales asociado.

Resumen campos y operadores diferenciales

Campo Escalar: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo escalar a toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Campo Vectorial: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Se le llamará campo vectorial a toda función $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Visto de otra forma, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^n$ campos escalares tal que $F_i : \Omega \to \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{x})\vec{e}_i$$

Gradiente de un campo escalar: Sea f un campo escalar, al menos C^1, se define el gradiente de f como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Línea de flujo: Dado un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable, una línea de flujo es una curva $\vec{r}(t)$ que satisface:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Gradiente de un campo vectorial: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el gradiente de $\vec{F}$ como:

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergencia: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}+F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Rotor: Sea $\vec{F} = F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}+F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el rotor de $\vec{F}$ como:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$