Auxiliar 8: Imagen y Preimagen

Profesor: Matías Pavez Signé
Auxiliares: Bruno Skarmeta, Vicente Sandoval

P1. Sea $f : E \to F$ una función.

a) Sea $A \subseteq F$, pruebe que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

b) Sean $A, B \subseteq F$, pruebe que $f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

P2. Sea $f : E \to F$ una función. Pruebe que:

a) f es sobreyectiva $\iff \forall B \subseteq F, B = f(f^{-1}(B))$.

b) f es inyectiva $\iff \forall A \subseteq F, A = f^{-1}(f(A))$.

c) $(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$.

d) $(\forall A, B \subseteq E)\ f(A) \backslash f(B) = f(A \backslash B) \iff f$ es inyectiva.

(Propuesto) Considerando además dos conjuntos $A, B \subseteq f(E)$. Muestre que:

e) $A \cup B = f(E) \iff f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = E$

f) $A \cap B = \varnothing \iff f(f^{-1}(A)) \cap f(f^{-1}(B)) = \varnothing$.

P3. (*01-2024*) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $f(n) = n/2$ si n es par, y $f(n) = n-1$ si n es impar.

a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(\{0, 1, \ldots, n\}) \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$.

b) Para cada número impar $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $f^{-1}(\{n\}) = \{2n\}$.

c) Demuestre que $f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}) = \{2n \mid n \text{ es un número natural impar}\}$.

P4. [**Propuesto**] Sea E el conjunto de referencia. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por $f(X, Y) = X \cup Y$ para cada $(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$.

a) Calcule, justificando su respuesta, $f^{-1}(\{\varnothing\})$.

b) Demuestre que $f^{-1}(\{E\}) = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X^c \subseteq Y\}$.

Resumen Conjunto Imagen y Preimagen

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

- El **conjunto imagen** de $A' \subseteq A$ es

$$f(A') = \{f(x) \in B | x \in A'\}$$

  Notar que $y \in f(A') \iff \exists x \in A', f(x) = y$.
- El **conjunto preimagen** de $B' \subseteq B$ es

$$f^{-1}(B') = \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

  Notar que $x \in f^{-1}(B') \iff f(x) \in B'$.

Propiedades

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

- $A' \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$
- $B' \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$
- Para $A_1, A_2 \subseteq A$,
  - $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  - $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
  - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- Para $B_1, B_2 \subseteq B$,
  - $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
  - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
  - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$