Auxiliar Extra: Examen

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez &
Ignacio Dagach Abugattas

P1. Polinomios, solo polinomios

a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere el polinomio

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$$

. Si se sabe que $Q(4) = Q(2) = c$.

i) Pruebe que $a = -3$ y $b = 4$.

ii) Si se sabe además que $2i\sqrt{2}$ es raíz de $Q(x)$, pruebe que $c = -24$.

iii) Factorice $Q(x)$ completamente como producto de polinomios con coeficientes reales y como producto de polinomios con coeficientes complejos.

b) Considere los siguientes polinomios en $\mathbb{C}[x]$

$$P(x) = x^4 + ix^3 + 3x^2 - 4 \qquad D(x) = x - i$$

i) Encuentre $Q \in \mathbb{C}[x]$ y $r \in \mathbb{C}$ tales que $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + r$.

c) Sea $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 \in \mathbb{C}[x]$.

i) Sabiendo que una de las raíces de P es $-1 + i$, factorice P en $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.

d) Considere el polinomio

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + ax + b,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, y suponga que $p(1) = p(2) = 0$.

i) Determine los valores de a y b.

ii) Calcule todas las raíces de $p(x)$ y factorícelo completamente en $\mathbb{R}[x]$.

P2. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

a) Considere $H = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Denotamos por $+$ la suma de números complejos y por $\cdot$ el producto de números complejos. Se sabe (no lo demuestre) que $(H, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, donde el neutro para $+$ corresponde a $0 \in \mathbb{C}$ y el neutro para $\cdot$ corresponde a $1 \in \mathbb{C}$.

   i) Demuestre que $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero.

   ii) Demuestre que los únicos elementos invertibles de $(H, \cdot)$ son 1, -1, i y $-i$.

b) Las siguientes dos tablas incompletas definen parcialmente las dos operaciones del cuerpo $(F, +, \cdot)$, donde $F = \{e, u, a, b\}$.

$+$	e	u	a	b
e	e	u	a	b
u	u	e		a
a	a			u
b	b			

$-$	e	u	a	b
e				
u		u		
a			b	u
b				a

   i) Considerando la información entregada por las tablas, demuestre que e debe ser el neutro para $+$ y que u debe ser el neutro para $\cdot$.

   ii) Considerando las propiedades que debe cumplir un cuerpo, complete las tablas de ambas operaciones. Justifique detalladamente su respuesta.

c) Sea $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ y $*$ definida como $x * y = x + y + x \cdot y$, para todos $x, y \in S$.
Pruebe que $*$ es ley de composición interna en S.

d) Sea G un grupo. Pruebe que:
G es abeliano $\iff \forall a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

e) Sea X un conjunto infinito. Considere el anillo $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$, donde

$$A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{y} \quad A \cdot B := A \cap B.$$

Notar que $\emptyset$ es el neutro para $+$ y que $A \Delta A = \emptyset$, para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$.

   i) Pruebe que $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathcal{P}(X), +)$, donde

$$H = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es finito}\}.$$

   ii) Pruebe que todo elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, es divisor de cero en el anillo $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$.

Resumen Auxiliar Extra Examen: Polinomios

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Definición

Sea K cuerpo. Un **polinomio** es una expresión:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{con } a_k \in K$$

El conjunto de polinomios sobre K se denota $K[x]$.

Propiedades Básicas

- **Igualdad:**
  Coinciden todos los coeficientes
- **Grado** ($\mathrm{gr}(p)$):
  Máximo k tal que $a_k \neq 0$
- **Mónico:** Coeficiente principal $a_n = 1$
- **Polinomio nulo:**
  Todos $a_k = 0$ (grado no definido)

Operaciones

- **Suma:**

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) x^k$$

$$\mathrm{gr}(p+q) \leq \max\{\mathrm{gr}(p), \mathrm{gr}(q)\}$$

- **Producto:**

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

$$\mathrm{gr}(p \cdot q) = \mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q)$$

Teorema del Resto

Para cualquier $p \in K[x]$ y $c \in K$, existe $q \in K[x]$:

$$p(x) = (x-c) \cdot q(x) + r$$

donde el resto $r = p(c)$.

Raíces

$c \in K$ es **raíz** de p si $p(c) = 0$.
Equivalentemente: $(x-c)$ divide a $p(x)$.

Propiedades:

- Un polinomio no nulo de grado n tiene **a lo más** n raíces
- Si p, de grado n, tiene **más de** n raíces $\implies p = 0$
- Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos y $\mathrm{gr}(p), \mathrm{gr}(q) \leq n \implies p = q$

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz compleja.
Corolario: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es raíz, entonces $\overline{z}$ también es raíz.

Raíces Racionales

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ (mónico). Si $r = \frac{a}{b}$ (fracción irreducible) es raíz, entonces:

- $a \mid a_0$ (divide al término independiente)
- $b \mid 1$ (como es mónico, $b = \pm 1$)

$\implies r$ es **entero** y divisor de a_0.

Resumen Auxiliar Extra Examen: Estructuras Algebraicas

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Vicente Maturana Gálvez & Ignacio Dagach Abugattas

Estructuras Algebraicas

Una **ley de composición interna** (l.c.i.) en $A \neq \emptyset$ es una función:

$$* : A \times A \to A$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

Al par $(A, *)$ se le llama **estructura algebraica**.

Una l.c.i. puede ser:

- **Asociativa:** $\forall x, y, z :$ $(x * y) * z = x * (y * z)$
- **Elemento neutro** (e)**:** $\forall x : x * e = e * x = x$
- **Inverso:** Para cada x existe x^{-1} tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$
- **Conmutativa:** $\forall x, y : x * y = y * x$
- **Absorbente** (a)**:** $\forall x : x * a = a$
- **Idempotente (a):** $a * a = a$
- **Cancelable (a):** $a * x = a * y \implies x = y$

Grupo

$(G, *)$ es **grupo** si:

- $*$ es asociativa
- Existe elemento neutro
- Todo elemento tiene inverso

Un grupo se dice **Abeliano** si además es conmutativo

Subgrupo

Sea $(G, *)$ grupo y $H \subseteq G$ no vacío.
$(H, *)$ es **subgrupo** si:

$$\forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H$$

Anillo

$(A, +, \cdot)$ es **anillo** si:

- $(A, +)$ es grupo abeliano
- $\cdot$ es asociativa
- $\cdot$ distribuye sobre $+$
- Existe neutro multiplicativo (1)

Es **conmutativo** si $\cdot$ es conmutativa.

Cuerpo

$(K, +, \cdot)$ es **cuerpo** si:

- Es anillo conmutativo
- $\forall x \neq 0$ existe inverso multiplicativo
- $0 \neq 1$

Divisores del cero:
En un anillo, $x \neq 0$ es **divisor del cero**, si $\exists y \neq 0$ tal que: $xy = 0 \ \vee yx = 0$.
De lo anterior, inmediatamente, y es divisor del cero

- Cuerpo $\implies$ No tiene divisores de cero
- x divisor del 0 $\implies$ x no es invertible para $\cdot$